

CONTRÔLE 2

Documents et calculatrices sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (3 points)

Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Donner l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E .

Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$?

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\rightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x - 2y, x - y) \end{aligned}$$

1. Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
2. Vérifier que $f \circ f = f$.

Soit E un ensemble et $g \in \mathcal{F}(E, E)$ telle que $g \circ g = g$.

3. Montrer que si g est injective, alors $g = Id_E$, c'est-à-dire $\forall x \in E, g(x) = x$.
4. Montrer que si g est surjective, alors $g = Id_E$.

Exercice 3 (4 points)

Montrer

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 2y - z = 0\} = \{(\lambda, 2\lambda, -3\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Exercice 4 (6 points)

On définit sur $\mathbf{R}^2$ la relation

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \text{ si } y + x'^2 = y' + x^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence de $(0, 0)$.
3. Soit $a \in \mathbf{R}$. Donner la classe d'équivalence de $(0, a)$.
4. Représenter l'ensemble des classes d'équivalence.