

CONTRÔLE 2

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Le barème est donné à titre indicatif : 8 - 4 - 8.

Exercice 1 : nombres premiers

Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3k + 2$ où k désigne un entier naturel.

Nous allons pour cela nous placer dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ pour effectuer des calculs modulo 3.

1. Donner quatre exemples de nombres premiers de la forme $3k + 2$.
2. Réduire modulo 3 les produits : $\overline{7} \times \overline{31} \times \overline{43}$, $\overline{8} \times \overline{65}$ et $\overline{29} \times \overline{74} \times \overline{302}$.
3. Déterminer, en fonction de l'entier naturel a , la valeur de $\overline{a}^2$ dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un nombre fini m de nombres premiers de la forme $3k + 2$. Nous les notons : $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Posons $N = 1 + \prod_{i=1}^m p_i^2$.

4. Justifier que N n'est divisible par aucun des nombres premiers p_i ci-dessus.
5. Réduire N modulo 3.
6. En déduire que N admet un diviseur premier p de la forme $p = 3k + 2$.
Indication : que se passerait-il modulo 3 si tous les facteurs premiers de N étaient de la forme $3k + 1$?
7. Conclure.

Exercice 2 : parties du plan et de l'espace

1. Soit $R > 0$. Définir dans $\mathbf{R}^2$ le disque du plan, de centre $(0, 0)$ et de rayon R , de deux manières différentes :
 - de manière implicite, à l'aide d'une équation cartésienne ;
 - de manière paramétrique.
2. Représenter dans le plan l'ensemble suivant :

$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ et } -e^x \leq y \leq e^x \}.$$

3. Représenter dans l'espace l'ensemble :

$$\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \leq 0 \text{ et } y^2 + z^2 \leq e^{2x} \}.$$

Exercice 3 : la sorcière d'Agnesi

Le but de cet exercice est de paramétrer et de représenter la courbe $\mathcal{C}$ du plan d'équation cartésienne : $x^2y = 1 - y$.

Nous notons :

$$A = \{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2y = 1 - y \} \quad \text{et} \quad B = \{ (\tan(\theta), \cos^2(\theta)) \mid \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\}.$$

(Nous rappelons que $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.)

1. Montrer que $B \subset A$.

Soit $(x, y) \in A$.

2. Exprimer y en fonction de x . En déduire : $0 < y \leq 1$.
3. En déduire : $\exists \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $y = \cos^2(\theta)$.
4. Déterminer alors l'expression de x en fonction de θ .
5. En déduire (en changeant éventuellement le réel θ) que $(x, y) \in B$. Conclure que $A = B$.

Représentation

6. Donner les coordonnées de cinq points différents de la courbe $\mathcal{C}$ et les représenter.
7. Représenter l'allure générale de la courbe.