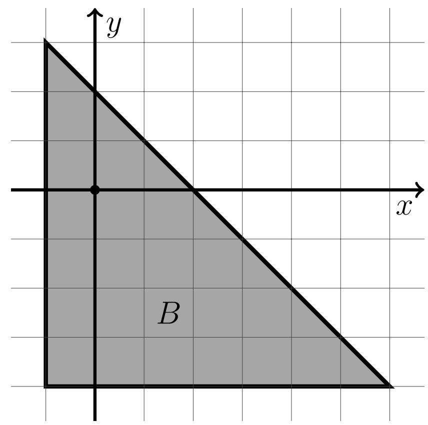
Contrôle 2

Calculatrice et documents sont interdits.
En dehors des exceptions précisées dans l'énoncé, tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif : 6 - 8 - 6.

Exercice 1 : parties du plan

1. **Préliminaires**
   (a) Démontrer rigoureusement l'inégalité : $\sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$.
   (b) Démontrer : $\forall \theta \in \mathbf{R},\ \cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$.
2. **Ensembles**
   Soit $A = \{(2\cos(\theta) + 1, 2\sin(\theta) - 2) \in \mathbf{R}^2 \mid \theta \in \mathbf{R}\}$.
   (a) Cet ensemble est représenté dans le plan par un cercle. Donner sans justification son équation cartésienne, son centre et son rayon.
   (b) Définir mathématiquement l'ensemble B représenté par le triangle grisé ci-contre. (On précise que les bords de l'ensemble sont inclus dans B.)
   (c) Démontrer rigoureusement que $A \subset B$.



Exercice 2 : plus grand diviseur strict

Pour un entier n, on appelle **plus grand diviseur strict de** n le plus grand entier k tel que $k|n$ et $k < n$.
Par exemple, pour $n = 10$, ses diviseurs sont : 1, 2, 5 et 10 ; son plus grand diviseur strict est $k = 5$. Cette définition ne peut pas s'appliquer aux entiers 0 et 1.

Nous définissons l'application
$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbf{N} \setminus \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ n & \longmapsto & \text{le plus grand diviseur strict de } n \end{array}$$

Nous notons respectivement **P**, **Pair** et **Imp** les ensembles des entiers naturels premiers, pairs et impairs.

1. Donner les valeurs de $\varphi(7)$, $\varphi(9)$ et $\varphi(100)$.
2. Soit $p \in \mathbf{P}$. Déterminer $\varphi(p)$.
3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer $\varphi(2n)$.
4. Sans justification, donner l'ensemble image $\varphi(\mathbf{Pair} \setminus \{0\})$.
5. Montrer par double inclusion que $\varphi(\mathbf{Imp} \setminus \{1\}) = \mathbf{Imp}$.
6. Déterminer l'ensemble $\varphi^{-1}(\{1\})$ des antécédents de 1 par φ.
7. Montrer, toujours par double inclusion, que $\varphi^{-1}(\mathbf{P}) = \{pq\ ;\ p \in \mathbf{P} \text{ et } q \in \mathbf{P}\}$.

Exercice 3 : lois de réciprocité quadratique

Soient a et n des entiers naturels.
On dit que a est un **carré modulo** n si : $\exists b \in \mathbf{N}$, $a = b^2 \mod n$.

Nous admettons les résultats suivants (appelés lois de réciprocité quadratique) :
Soient p et q des nombres premiers.
• Si p ou q est congru à 1 modulo 4, alors p est un carré modulo q si et seulement si q est un carré modulo p.
• Si p et q sont congrus à 3 modulo 4, alors p est un carré modulo q si et seulement si q n'est pas un carré modulo p.

Le but de cet exercice est d'appliquer ces propriétés pour déterminer si 43 est un carré modulo 97.

1. Réduire modulo 4 les nombres premiers 5, 7, 11, 43 et 97.
   Réduire également 43 modulo 11 et 97 modulo 43.
2. Écrire la table des carrés dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$. Les nombres 5 et 7 sont-ils des carrés modulo 11 ?
3. Le nombre 11 est-il un carré modulo 5 ? Et modulo 7 ? Est-ce conforme aux lois de réciprocité quadratique ?
4. En appliquant plusieurs fois les lois, déterminer si 43 est un carré modulo 97.