Contrôle 2

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif : 9 - 11.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : le problème des restes chinois

Étant donné des nombres entiers a_1, a_2, n_1 et n_2, le problème des restes chinois consiste à chercher un entier x tel que

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod n_1 \\ x \equiv a_2 \mod n_2 \end{cases}$$

Nous commencerons par étudier deux exemples puis proposerons une généralisation.

1. Considérons $n_1 = 15$ et $n_2 = 67$.
   (a) Trouver un nombre entier α_1 tel que $67\alpha_1 \equiv 1 \mod 15$.
   (b) Déterminer l'égalité de Bézout pour $n_1 = 15$ et $n_2 = 67$.
   (c) En déduire un nombre entier α_2 tel que $15\alpha_2 \equiv 1 \mod 67$.
   (d) Soient a_1 et a_2 des nombres entiers et $x = 67\alpha_1 a_1 + 15\alpha_2 a_2$.
   Que vaut x modulo 15 et modulo 67 ?
   (e) En déduire l'expression (qu'on ne demande pas d'évaluer) d'une solution du problème

   $$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 15 \\ x \equiv -1 \mod 67 \end{cases}$$

   Cette solution est-elle unique ?

2. Considérons maintenant $n_1 = 15$ et $n_2 = 50$. Démontrer que le problème

   $$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 15 \\ x \equiv 3 \mod 50 \end{cases}$$

   n'a pas de solution $x \in \mathbf{Z}$.

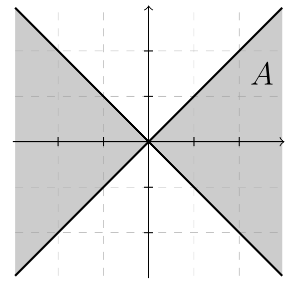
3. Soient n_1 et n_2 des nombres premiers entre eux, et a_1, a_2 des nombres entiers.
   En vous appuyant sur la méthode employée dans le premier exemple, démontrer qu'il existe un nombre entier x tel que

   $$\begin{cases} x \equiv a_1 \mod n_1 \\ x \equiv a_2 \mod n_2 \end{cases}$$

Exercice 2 : une lemniscate

Le but de ce problème est d'étudier l'ensemble

$$E = \{(r\cos(t), r\cos(t)\sin(t))\ ;\ r \in [0,1], t \in \mathbf{R}\}.$$



1. Soit A l'ensemble représenté ci-contre. Le bord de A est constitué de deux droites qui font partie de A.
   Donner, sans justification, une définition mathématique de A.
   Remarque : l'utilisation de la valeur absolue peut permettre de définir A simplement.
2. Démontrer $E \subset A$.
3. Démontrer également que E est inclus dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
4. Soit f l'application définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \cos(t)\sin(t)$. Déterminer son image $f(\mathbf{R})$.
5. En déduire que E est inclus dans un ensemble de la forme $B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid -b \leqslant y \leqslant b\}$, où b est un nombre réel que l'on précisera.
   Représenter cet ensemble.
6. Démontrer que le couple $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ n'est pas un élément de E.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et chercher des paramètres r et t correspondant à ce point.
7. Démontrer que le couple $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$ est élément de E.
8. Sur une grande figure, représenter les éléments de E correspondant aux couples de paramètres (r,t) avec $r \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ et $t \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$.
9. Sur cette même figure, représenter l'allure de l'ensemble E, en faisant bien apparaître toutes les propriétés démontrées précédemment.