Contrôle 2

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif : 7 - 7 - 8.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : équation diophantienne

On cherche à déterminer les solutions entières de l'équation (E) : $\quad 10x - 7y^3 = 1.$

1. Dresser le tableau de congruence des cubes dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ (*i.e.* modulo 10).
2. Résoudre dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ l'équation $\bar{3}\bar{a} = \bar{1}$.

   Cherchons désormais les solutions de notre équation.
3. Soit $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ une solution de (E). Montrer que $y = 3 \mod 10$.
4. Trouver une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).
5. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions de (E). Montrer

$$\mathcal{S} = \{(x_0 + 21ky_0^2 + 210k^2y_0 + 700k^3 \ , \ y_0 + 10k) \ ; \ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Exercice 2 : images d'une application et incertitude

On considère une grandeur physique dépendant d'un certain nombre de paramètres. Les valeurs des paramètres étant connues avec une certaine incertitude, on aimerait connaître l'incertitude sur la valeur correspondante de la grandeur physique.

Nous allons étudier cette question sur deux exemples : On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{5}{x-1} \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{rcl} (\mathbf{R}_+^*)^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{x-y}{2x+y} \end{array}$$

1. Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Déterminer l'image de l'intervalle $[2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]$ par f.
2. On a mesuré la valeur $x \approx 2$. L'incertitude sur x se traduit par $x \in [2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]$. Il s'agit d'un intervalle de longueur 2ε.
   D'après ce qui précède, l'incertitude sur $f(x)$ est-elle plus grande que l'incertitude sur x ?
3. Soient $\mu = \frac{1}{2}$ et $A = [5 - \mu, 5 + \mu] \times [2 - \mu, 2 + \mu]$.
   Montrer que $g(A) \subset [\frac{4}{27} \ , \ \frac{8}{21}]$. L'incertitude a-t-elle augmenté ?
4. <u>Bonus</u> : a-t-on $g(A) = [\frac{4}{27} \ , \ \frac{8}{21}]$?

Exercice 3 : bijection réciproque de la fonction sh

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbf{R}_+^* & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x - \dfrac{1}{x} \end{array}$$

1. Déterminer le ou les antécédents de 2 par φ.
   On se ramènera à une équation polynomiale.
2. Généraliser et trouver, pour tout nombre réel y, un antécédent de y par φ.
3. Démontrer que φ est une bijection et donner sa bijection réciproque φ^{-1}.

On définit maintenant la fonction
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh} : & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$$

4. Exprimer la fonction sh comme une composée de φ avec d'autres fonctions élémentaires dont on précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.
5. En déduire que sh est une bijection et donner sa bijection réciproque.

La fonction sh*, appelée* sinus hyperbolique*, est une fonction importante. Sa bijection réciproque que l'on vient de déterminer est appelée* arg sinus hyperbolique *et se note* argsh.