Corrigé du contrôle 2

Exercice 1

On cherche à déterminer les solutions entières de l'équation

$$10x - 7y^3 = 1.$$

1. Dresser le tableau des cubes dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

$\bar{x}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{x}^3$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$

2. Résoudre dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ l'équation $\bar{3}\bar{a} = \bar{1}$.

Là encore, on résout cette équation en dressant un tableau :

$\bar{a}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{3}\bar{a}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$

On en déduit que l'unique solution dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ de l'équation $\bar{3}\bar{a} = \bar{1}$ est $\bar{a} = \bar{7}$.

Cherchons désormais les solutions de notre équation.

3. Soit $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ une solution de l'équation. Montrer que $y = 3 \mod 10$.

Comme (x, y) est une solution de l'équation, on a $10x - 7y^3 = 1$. En particulier, modulo 10, on obtient $-7y^3 = 1 \mod 10$. Or dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$, $-\bar{7} = \bar{3}$ et notre égalité devient $\bar{3}\bar{y}^3 = \bar{1}$. D'après la question 2, on en déduit $\bar{y}^3 = \bar{7}$. Et d'après la question 1, on en déduit $\bar{y} = \bar{3}$.

4. Trouver une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation.

D'après ce qui précède, on est tenté d'essayer $y_0 = 3$. Alors $1 + 7y_0^3 = 190$ (qui est bien un multiple de 10). Ainsi, en prenant $x_0 = 19$, on a bien $10x_0 = 1 + 7y_0^3$. Donc (x_0, y_0) est une solution de l'équation.

5. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation. Montrer

$$\mathcal{S} = \{(x_0 + 21ky_0^2 + 210k^2y_0 + 700k^3, y_0 + 10k)\ ;\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Notons B l'ensemble de droite et raisonnons par double inclusion.
Soit $(x, y) \in B$. Alors il existe un entier k tel que $(x, y) = (x_0 + 21ky_0^2 + 210k^2y_0 + 700k^3, y_0 + 10k)$. Donc (en utilisant la formule du binôme)

$$7y^3 = 7(y_0 + 10k)^3 = 7y_0^3 + 210ky_0^2 + 2100k^2y_0 + 7000k^3.$$

On reconnaît une partie de l'expression de x et on obtient après simplifications

$$10x - 7y^3 = 10x_0 - 7y_0^3 = 1.$$

Donc (x, y) est bien une solution de l'équation et appartient à $\mathcal{S}$.

Soit $(x, y) \in \mathcal{S}$. Alors d'après la question 3, $y = 3 \mod 10$. Donc il existe $k \in \mathbf{Z}$, tel que $y = 3 + 10k = y_0 + 10k$. Par hypothèse, $10x - 7y^3 = 1$, donc

$$\begin{aligned} 10x = 1 + 7y^3 = 1 + 7(y_0 + 10k)^3 &= 1 + 7y_0^3 + 210ky_0^2 + 2100k^2y_0 + 7000k^3 \\ &= 10x_0 + 210ky_0^2 + 2100k^2y_0 + 7000k^3. \end{aligned}$$

On en déduit que $x = x_0 + 21ky_0^2 + 210k^2y_0 + 700k^3$.
Ainsi (x, y) est bien un élément de B.
Par double inclusion, on a bien démontré que $\mathcal{S} = B$.

Exercice 2

On considère une grandeur physique $f(x)$ dépendant d'une certaine variable x. La valeur de x étant connue avec une certaine incertitude, on aimerait connaître l'incertitude sur la valeur de $f(x)$ correspondante.
Nous allons étudier cette question sur deux exemples : On considère les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{5}{x-1} \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}_+^*)^2 & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x-y}{2x+y} \end{array}$$

1. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Déterminer l'image de l'intervalle $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$ par f.

   Nous allons montrer que $f([2-\varepsilon, 2+\varepsilon]) = [\frac{5}{1+\varepsilon}, \frac{5}{1-\varepsilon}]$. Il y a plusieurs façons de le faire.

   • Preuve algébrique : raisonnons par double inclusion. Soit $x \in [2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$.
   Alors $2-\varepsilon \leqslant x \leqslant 2+\varepsilon$.
   Donc $1-\varepsilon \leqslant x-1 \leqslant 1+\varepsilon$.
   Donc $\frac{5}{1-\varepsilon} \geqslant \frac{5}{x-1} \geqslant \frac{5}{1+\varepsilon}$.
   Ainsi $f(x) \in [\frac{5}{1+\varepsilon}, \frac{5}{1-\varepsilon}]$.
   Nous avons montré que $f([2-\varepsilon, 2+\varepsilon]) \subset [\frac{5}{1+\varepsilon}, \frac{5}{1-\varepsilon}]$.

   Réciproquement, soit $y \in [\frac{5}{1+\varepsilon}, \frac{5}{1-\varepsilon}]$. Posons $x = 1 + \frac{5}{y}$.
   Alors, comme $\frac{5}{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant \frac{5}{1-\varepsilon}$, on déduit $1+\varepsilon \geqslant \frac{5}{y} \geqslant 1-\varepsilon$ et donc $2+\varepsilon \geqslant x \geqslant 2-\varepsilon$.
   De plus, $f(x) = \frac{5}{1+\frac{5}{y}-1} = y$.
   Ainsi y est l'image d'un élément x de $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$.
   Donc $y \in f([2-\varepsilon, 2+\varepsilon])$ et nous avons montré $[\frac{5}{1+\varepsilon}, \frac{5}{1-\varepsilon}] \subset f([2-\varepsilon, 2+\varepsilon])$.

   L'égalité est ainsi démontrée.

   • Preuve analytique : on sait que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$. On en déduit (par composition avec les applications croissantes $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto 5x$) que l'application f est décroissante sur $]1,+\infty[$. (Il est aussi possible de calculer la dérivée de f pour arriver à cette même conclusion).
   D'autre part, f est une application continue sur $]1,+\infty[$.
   On en déduit que l'image de tout intervalle $[a,b]$ est $[f(b), f(a)]$. Ainsi

   $$f([2-\varepsilon, 2+\varepsilon]) = [f(2+\varepsilon), f(2-\varepsilon)] = \left[\frac{5}{1+\varepsilon}, \frac{5}{1-\varepsilon}\right].$$

2. On a mesuré la valeur $x \approx 2$. L'incertitude sur x se traduit par $x \in [2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$. Il s'agit d'un intervalle de longueur 2ε.
   D'après ce qui précède, l'incertitude sur $f(x)$ est-elle plus grande que l'incertitude sur x ?

   Comparons la taille de l'intervalle image à la taille de l'intervalle de départ. Le nombre x est dans un intervalle de longueur 2ε. Nous avons montré que son image est dans un intervalle de longueur

   $$\frac{5}{1-\varepsilon} - \frac{5}{1+\varepsilon} = \frac{10\varepsilon}{1-\varepsilon^2}.$$

Comme $\varepsilon \in]0,1[$, $1-\varepsilon^2 < 1$, donc $\frac{10\varepsilon}{1-\varepsilon^2} > 10\varepsilon$. En particulier $\frac{10\varepsilon}{1-\varepsilon^2} > 2\varepsilon$.
Donc la taille de l'intervalle image est supérieure à la taille de l'intervalle de départ : l'incertitude sur $f(x)$ est supérieure à celle sur x.

3. Soient $\mu = \frac{1}{2}$ et $A = [5-\mu, 5+\mu] \times [2-\mu, 2+\mu]$.
Montrer que $g(A) \subset [\frac{4}{27}\ ,\ \frac{8}{21}]$.
L'incertitude a-t-elle augmenté ?

Soit $(x,y) \in A$, c'est-à-dire $x \in [5-\mu, 5+\mu]$ et $y \in [2-\mu, 2+\mu]$. Montrons que $g(x,y) \in [\frac{4}{27}\ ,\ \frac{8}{21}]$.
Comme $5-\mu \leqslant x \leqslant 5+\mu$ et $2-\mu \leqslant y \leqslant 2+\mu$, on déduit $12-3\mu \leqslant 2x+y \leqslant 12+3\mu$ et puisque $-2-\mu \leqslant -y \leqslant -2+\mu$, $3-2\mu \leqslant x-y \leqslant 3+2\mu$.
Donc $\frac{3-2\mu}{12+3\mu} \leqslant \frac{x-y}{2x+y} \leqslant \frac{3+2\mu}{12-3\mu}$.
Avec $\mu = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{4}{27} \leqslant \frac{x-y}{2x+y} \leqslant \frac{8}{21}$ Donc $g(x,y) \in [\frac{4}{27}\ ,\ \frac{8}{21}]$.

L'incertitude sur x et y se traduit par des intervalles de longueur $2\mu = 1$. L'intervalle $g(A)$ a une longueur $\frac{8}{21} - \frac{4}{27}$ clairement inférieure à 1. L'incertitude sur $g(x,y)$ est donc inférieure à l'incertitude sur x et y.

4. <u>Bonus</u> : a-t-on $g(A) = [\frac{4}{27}\ ,\ \frac{8}{21}]$?

La réponse est a priori non car nous avons obtenu notre encadrement de $g(x,y)$ à l'aide majorations et minorations peu subtiles. En effet, le minimum de $x-y$ et le maximum de $2x+y$ ne sont sans doute pas atteints pour les mêmes couples (x,y).
Pour répondre rigoureusement à la question, montrons par exemple que $\frac{8}{21}$ n'est pas dans l'image de A par g.
Supposons par l'absurde qu'il existe $(x,y) \in A$ tel que $g(x,y) = \frac{8}{21}$. Alors $\frac{x-y}{2x+y} = \frac{8}{21}$. Donc $21x - 21y = 16x + 8y$, donc $y = \frac{5}{29}x$. Or, comme $(x,y) \in A$, $x \leqslant \frac{11}{2}$, donc $y \geqslant \frac{5}{29} \cdot \frac{11}{2} = \frac{55}{58}$. Or $y \geqslant \frac{3}{2}$ et nous avons ainsi obtenu une contradiction.
Donc $\frac{8}{21}$ n'est pas dans l'image de A par g et $g(A) \neq [\frac{4}{27}\ ,\ \frac{8}{21}]$.

Il est possible de démontrer avec un travail d'analyse plus fin que $g(A) = [\frac{4}{23}\ ,\ \frac{8}{25}]$. Pour cela, on exprime différemment la fonction g : $g(x,y) = \frac{x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}y}{2x+y} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{y}{2x+y}$. Il est plus facile de maximiser et minimiser le second terme que l'expression initiale de g. En effet, à x positif fixé, la fonction $y \mapsto \frac{y}{2x+y}$ est croissante et à y fixé, elle est décroissante avec x. On en déduit que $\frac{y}{2x+y}$ est minimal quand x est maximal et y minimal, donc sur A lorsque $x = \frac{11}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$. Et au contraire, il est maximal pour $x = \frac{9}{2}$ et $y = \frac{5}{2}$. Ainsi, la valeur maximale de g est $g(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{8}{25}$ et sa valeur minimale est $g(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}) = \frac{4}{23}$. Un argument de continuité peut permettre de montrer que g prend sur A toutes les valeurs intermédiaires.

Exercice 3

On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{1}{x} \end{array}$$

1. Déterminer le ou les antécédents par φ de 2.
   On se ramènera à une équation polynomiale.

   Cherchons les antécédents de $y = 2$: soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\varphi(x)2$. Alors $x - \frac{1}{x} = 2$. Donc $x^2 - 1 = 2x$, donc $x^2 - 2x - 1 = 0$. Les racines de cette équation de degré 2 sont $\frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$ et $\frac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$. Cette seconde racine est négative est n'appartient donc pas à notre ensemble de départ $\mathbf{R}_+^*$. Ainsi 2 ne peut avoir au plus qu'un seul antécédent : $1+\sqrt{2}$.
   Vérifions qu'l s'agit bien d'un antécédent de 2 :

   $$\varphi(1+\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2} - \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = 2.$$

   Conclusion : 2 a un unique antécédent qui est $1+\sqrt{2}$.

2. Généraliser et trouver, pour tout nombre réel y, un antécédent de y par φ.

   Le même raisonnement que ci-dessus permet de déterminer les antécédents de n'importe quel nombre y. On aboutit à la synthèse ci-dessous.
   Soit $y \in \mathbf{R}$. Posons $x = \frac{y+\sqrt{4+y^2}}{2}$.
   Alors, comme $4 + y^2 > y^2$, $\sqrt{4+y^2} > |y|$ et on en déduit $x > 0$. Donc $x \in \mathbf{R}_+^*$ et

   $$\varphi(x) = \frac{y+\sqrt{4+y^2}}{2} - \frac{2}{y+\sqrt{4+y^2}} = \frac{y+\sqrt{4+y^2}}{2} - 2\frac{y-\sqrt{4+y^2}}{y^2-(4+y^2)}$$
   $$= \frac{y+\sqrt{4+y^2}}{2} + \frac{y-\sqrt{4+y^2}}{2} = y.$$

   Ainsi x est un antécédent de y par φ.

3. Démontrer que φ est une bijection et donner sa bijection réciproque φ^{-1}.

   Il y a plusieurs preuves possibles :
   • On peut rédiger la question précédente en s'y prenant comme dans la première question. On démontre alors que tout élément y de $\mathbf{R}$ possède un antécédent par φ et que cet antécédent est unique. On en déduit que φ est bijective.

   • Sinon, on peut déjà affirmer d'après la question précédente que φ est surjective : tout élément de $\mathbf{R}$ admet un antécédent par φ. Il reste à montrer qu'elle est injective.
   Soient x et x' dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Alors $x - \frac{1}{x} = x' - \frac{1}{x'}$. Donc $x - x' =$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x'} = \frac{x'-x}{xx'}$. On en déduit $(x-x')(1+\frac{1}{xx'}) = 0$. Donc $x - x' = 0$ ou $1 + \frac{1}{xx'} = 0$. Or x et x' sont strictement positifs et cette seconde égalité est impossible. On en déduit donc que $x = x'$ et φ est injective.
Finalement, φ est bijective.

• La fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée est définie par $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$. Elle est strictement positive et on en déduit que φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. En particulier, elle est injective.
D'autre part, φ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Elle diverge vers $-\infty$ en 0^+ et vers $+\infty$ en $+\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel y, il existe x dans $]0, +\infty[$ tel que $y = \varphi(x)$. La fonction est donc surjective.
La fonction φ est donc bijective.

Quelque soit la preuve choisie, nous avons besoin du résultat de la question précédente pour déterminer la bijection réciproque de φ. Il s'agit de l'application qui associe à chaque réel y son unique antécédent par φ dans R_+^*. Il s'agit donc de l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}_+^* \\ & y & \mapsto & \dfrac{y+\sqrt{4+y^2}}{2} \end{array}$$

On définit maintenant la fonction $\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \end{array}$

4. Exprimer la fonction sh comme une composée de φ avec d'autres fonctions élémentaires dont on précisera bien les ensembles de départ et d'arrivée.

Définissons l'application $\begin{array}{rccc} d: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{2} \end{array}$, et considérons l'application exponentielle définie de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}_+^*$.
Alors sh est la composée des applications exp, φ et d :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = d \circ \varphi \circ \exp(x).$$

5. En déduire que sh est une bijection et donner sa bijection réciproque.

Chacune de ces trois applications est bijective pour les ensembles que nous avons précisés : exp a pour bijection réciproque ln, φ a pour bijection réciproque φ^{-1} et d a pour bijection réciproque l'application $x \mapsto 2x$.
Par composition de bijections, on déduit que sh est une bijection et sa bijection réciproque est $\mathrm{sh}^{-1} = \exp^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ d^{-1}$. On obtient ainsi l'expression de l'application argsh :

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{argsh}(y) = \ln\left(\frac{2y+\sqrt{4+4y^2}}{2}\right) = \ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$

La fonction sh *appelée* sinus hyperbolique *est une fonction importante. Sa bijection réciproque que l'on vient de déterminer est appelée* arg sinus hyperbolique *et se note* argsh.