Corrigé du contrôle 2

Exercice 1 : équation linéaire d'entiers

On considère les parties de $\mathbf{Z}^2$ suivantes :

$$A = \{\ (u,v) \in \mathbf{Z}^2 \mid 19u + 8v = 0\ \} \text{ et } B = \{\ (8k, -19k) \in \mathbf{Z}^2\ ;\ k \in \mathbf{Z}\ \}.$$

1. Démontrer que $A = B$.

   Montrons $B \subset A$: soit $(u,v) \in B$. Par définition de B, il existe un entier k tel que $(u,v) = (8k, -19k)$. Alors :

   $$19u + 8v = 18 \cdot 8k + 8 \cdot (-19k) = 0.$$

   Donc $(u,v) \in A$. Ainsi $B \subset A$.

   Montrons $A \subset B$. Soit $(u,v) \in A$. Alors $19u + 8v = 0$. Donc $19u = -8v$. En particulier 8 divise $19u$. Or 8 et 19 sont premiers entre eux, donc 8 divise u d'après le lemme de Gauss. Il existe donc un entier k tel que $u = 8k$. On obtient alors $19 \cdot 8k = -8v$, donc $v = -19k$. Finalement $(u,v) = (8k, -19k)$ et donc $(u,v) \in B$. Donc $A \subset B$.

   Par double inclusion nous avons démontré $A = B$.

2. Trouver un couple $(u_0, v_0) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $19u_0 + 8v_0 = 1$.

   On reconnaît une égalité de Bézout. On peut trouver des valeurs pour u_0 et v_0 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :

   $$\begin{aligned} 19 &= 2 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

   donc

   $$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ &= (19 - 2 \cdot 8) - (8 - 2 \cdot 3) \\ &= 19 - 3 \cdot 8 + 2(19 - 2 \cdot 8) \\ &= 3 \cdot 19 - 7 \cdot 8 \end{aligned}$$

   Ainsi pour $u_0 = 3$ et $v_0 = -7$, on obtient l'égalité souhaitée.

3.

4. Soit $(u_1, v_1) \in \mathbf{Z}^2$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$19u_1 + 8v_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (u_1 - u_0, v_1 - v_0) \in A.$$

Raisonnons par double implication. Soit $(u1, v_1) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $19u_1+8v_1 = 1$. Nous avons également $19u_0+8v_0 = 1$. En soustrayant ces égalités, on obtient $19(u_1-u_0)+8(v_1-v_0) = 0$. On reconnaît l'équation définissant A. Donc $(u_1 - u_0, v_1 - v_0) \in A$.
Réciproquement, supposons que $(u_1-u_0, v_1-v_0) \in A$. Alors $19(u_1-u_0)+8(v_1-v_0) = 0$, donc $19u_1 + 8v_1 = 19u_0 + 8v_0 = 1$. Ainsi (u_1, v_1) satisfait bien l'équation demandée.
L'équivalence est bien démontrée.

5. Déduire des questions précédentes une représentation paramétrique de l'ensemble

$$\{\ (u, v) \in \mathbf{Z}^2 \mid 19u + 8v = 1\ \}.$$

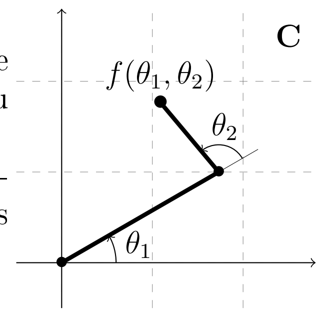
Continuons le raisonnement précédent : comme $A = B$, on a finalement l'équivalence :

$$19u_1 + 8v_1 = 1 \Longleftrightarrow (u_1 - u_0, v_1 - v_0) \in B.$$

Donc si $19u_1 + 8v_1 = 1$, alors il existe un entier k tel que $(u_1 - u_0, v_1 - v_0) = (8k, -19k)$. Ainsi $u_1 = 8k + u_0 = 8k + 3$ et $v_1 = -19k + v_0 = -19k - 7$. Il semble qu'on ait trouvé la forme générale des solutions de l'équation $19u + 8v = 1$.
Réciproquement, si (u_1, v_1) est de la forme $(8k + 3, -19k - 7) = (8k + u_0, -19k + v_0)$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors $(u_1 - u_0, v_1 - v_0) = (8k, -19k)$ est un élément de B. D'après notre équivalence, on en déduit que $19u_1 + 8v_1 = 1$. Autrement dit, nous avons démontré par double inclusion que

$$\{\ (u, v) \in \mathbf{Z}^2 \mid 19u + 8v = 1\ \} = \{\ (8k + 3, -19k - 7) \in \mathbf{Z}^2\ ;\ k \in \mathbf{Z}\ \}.$$

On considère un automate formé de deux bras mécaniques : l'un de longueur 2 est fixé en l'origine, l'autre de longueur 1 est articulé au premier. Les deux peuvent tourner librement dans le plan.
On s'intéresse à la position de l'extrémité du second bras. En s'appuyant sur la figure, cette position est décrite en fonction des angles θ_1 et θ_2 par la fonction

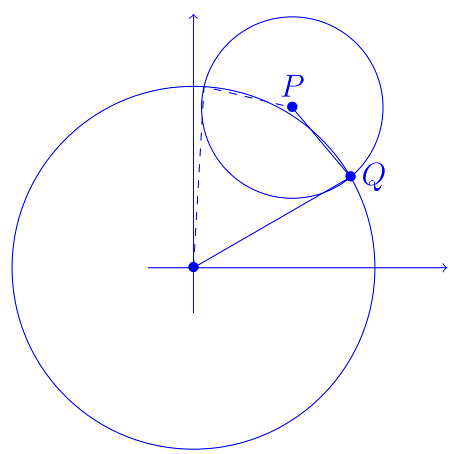


$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{C} \\ (\theta_1, \theta_2) & \mapsto & 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \end{array}$$

Dans tout l'exercice, on pourra s'appuyer sur des arguments géométriques accompagnés de figures pour justifier ses réponses.

1. Si l'extrémité de l'automate est située en un certain point P du plan, comment retrouver géométriquement la position globale possible de l'automate ?
   Sous quelle condition sur P cette construction géométrique est-elle possible ?

   Il s'agit de déterminer la position de l'articulation des deux bras. On sait qu'elle est située à une distance 2 de l'origine et à distance 1 de P. Pour la déterminer il suffit de tracer le cercle de centre O de rayon 2 et le cercle de centre P de rayon 1. L'articulation est alors située à l'une des intersections des deux cercles.

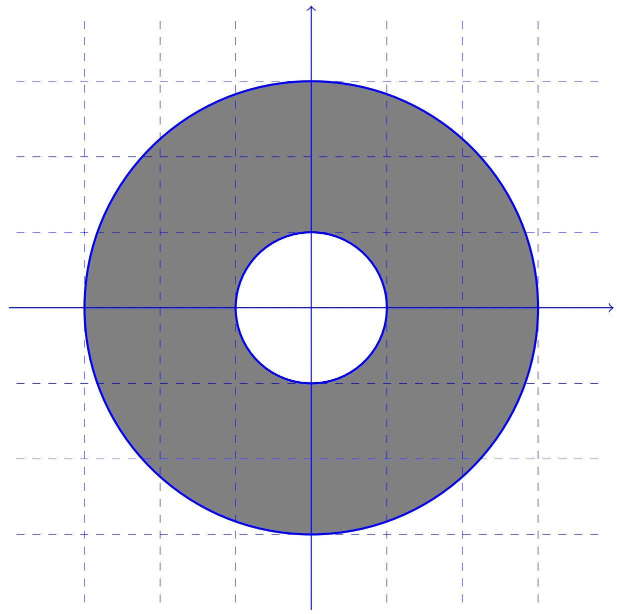
   On remarque qu'il y a deux points d'intersection des deux cercles et qu'il y a donc deux positions possibles pour l'automate. Le seul point P ne permet pas de savoir quelle position est la bonne.
   Pour que la construction soit possible, il faut que les deux cercles s'intersectent. L'inégalité triangulaire appliquée au triangle formé par les trois sommets P, O et Q de l'automate fournit deux résultats : $OP \leqslant OQ + QP = 3$ et $OQ \leqslant OP + PQ$. Donc $1 \leqslant OP \leqslant 3$.

2. Déterminer l'ensemble image $I = f(\mathbf{R}^2)$ de f et le représenter dans le plan complexe.

   Le raisonnement précédent nous permet de proposer la réponse suivante :

   $$I = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 3\}.$$

   Il s'agit d'une couronne de centre O, de rayon inférieur 1 et de rayon supérieur 3.



Montrons le résultat par double inclusion. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$. Alors $f(\theta_1, \theta_2) = 2e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ et avec l'inégalité triangulaire :

$$|f(\theta_1, \theta_2)| = |2e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}| \leqslant |2e^{i\theta_1}| + |e^{i(\theta_1+\theta_2)}| = 3$$

et

$$|f(\theta_1, \theta_2)| = |2e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}| \geqslant |2e^{i\theta_1}| - |e^{i(\theta_1+\theta_2)}| = 1$$

Donc $1 \leqslant |f(\theta_1, \theta_2)| \leqslant 3$ et $f(\theta_1, \theta_2) \in \{z \in \mathbf{C} \mid 1 \leqslant |z| \leqslant 3\}$.
Considérons maintenant un nombre complexe z de module compris entre 1 et 3. Nous avons montré à la question précédente que sous cette condition, il est possible de trouver une position de l'automate ayant pour extrémité le point d'affixe z. Il est donc possible (à l'aide de géométrie dans un triangle) de trouver des angles θ_1 et θ_2 tels que $f(\theta_1, \theta_2) = z$. Ainsi z est dans l'image de f et donc $z \in I$.
Par double inclusion, nous avons démontré l'égalité.

3. Soit $z \in \mathbf{C}$. Combien a-t-il d'antécédents par l'application f ? On distinguera plusieurs cas.

   Toujours à l'aide de notre construction géométrique, il est facile de répondre :

   — Si le module de z n'est pas compris entre 1 et 3, z n'est pas dans l'image de I et n'a donc pas d'antécédent.

     Pour les autres cas, il y a deux points de vue possibles.
   — Si on s'en tient à la fonction f, un argument de périodicité permet de dire que pour tout $z \in I$, z possède une infinité d'antécédents. Par exemple, pour $z = 3$, $3 = f(0, 0)$ mais également, pour tous entiers k et j, $3 = f(2k\pi, 2j\pi)$.

     Si on s'intéresse au point de vue géométrique, on a envie de dire que les angles de l'exemple précédent sont tous les mêmes et que 3 a un unique antécédent qui est donné par les angles $\theta_1 = 0 \mod 2\pi$ et $\theta_2 = 0 \mod 2\pi$ et qui correspond à une unique position de l'automate.
     Avec ce point de vue, on obtient les réponses suivantes :

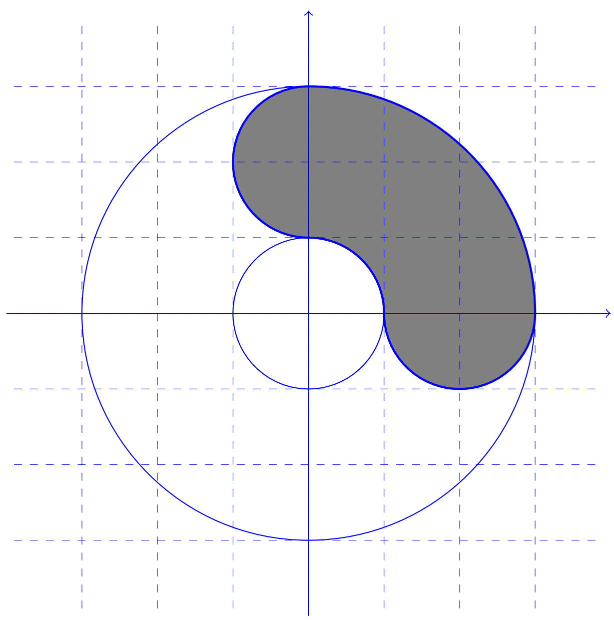
- Si $1 < |z| < 3$, alors les deux cercles de notre construction possèdent deux intersections et il y a donc deux couples (θ_1, θ_2) et (τ_1, τ_2) ayant pour image z par f. Donc z a deux antécédents, il correspond à deux positions différentes de l'automate.
- Si $|z| = 1$ ou 3, alors les deux cercles ont un seul point d'intersection (ils sont tangents) et z a alors un unique antécédent.

4. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

D'après ce qui précède, $f(\mathbf{R}^2) = I \neq \mathbf{C}$ donc f n'est pas surjective. Et certains éléments de $\mathbf{C}$ ont une infinité d'antécédents par f donc f n'est pas injective.

5. Représenter, sans justification, l'ensemble $f([0, \frac{\pi}{2}] \times \mathbf{R})$.

Si on fait varier θ_1 dans $\mathbf{R}$, cela signifie que le grand bras ne peut se déplacer que dans le cadran $x > 0, y > 0$. En revanche, θ_2 varie dans $\mathbf{R}$ et le second bras peut tourner librement. L'extrémité se déplace ainsi dans la zone grisée ci-dessous.



6. Donner, sans justification, une partie A de $\mathbf{R}^2$ telle que l'application f définisse une bijection de A vers I.

Notre application f est naturellement surjective vers son image $I = f(\mathbf{R}^2)$. Pour qu'elle puisse devenir une bijection, il faut régler le problème de non injectivité. Autrement dit, il faut restreindre l'ensemble de départ de manière à ce qu'une position de l'extrémité de l'automate ne puisse correspondre qu'à une seule position globale de l'automate et donc à un seul couple (θ_1, θ_2). On peut procéder ainsi : le grand bras peut tourner librement (mais d'un seul tour) mais le second bras ne peut tourner que d'un demi-tour. On propose par exemple de considérer :

$$A = [0, 2\pi[\times [0, \pi].$$

Exercice 3

On s'intéresse à l'équation (E) : $\quad 3x^3 + 8x^2 = 1$.

1. Résoudre cette équation dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.

   Pour résoudre dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, il suffit de tester toutes les valeurs possibles.
   Dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, l'équation devient modulo 3 : $\bar{0}x^3 + \bar{2}x^2 = \bar{1}$. Or $x = \bar{0}$, $\bar{1}$ ou $\bar{2}$. Pour $x = \bar{0}$, $\bar{2}x^2 = \bar{0}$; pour $x = \bar{1}$, $\bar{2}x^2 = \bar{2}$; pour $x = \bar{2}$, $\bar{2}x^2 = \overline{24} = \bar{2}$. Dans tous les cas, $\bar{2}x^2 \neq \bar{1}$. L'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$: $\mathcal{S}_{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} = \emptyset$.

   Dans $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, l'équation devient $\bar{3}x^3 = \bar{1}$. Faisons le tableau de toutes les valeurs possibles de $\bar{3}x^3$:

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
x^3	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{3}x^3$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$

   On en déduit que l'unique solution à l'équation est $x = \bar{3}$: $\mathcal{S}_{\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}} = \{\bar{3}\}$.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbf{Z}$.

   Supposons que l'équation (E) possède une solution a dans $\mathbf{Z}$. Donc $3a^3 + 8a^2 = 1$. En particulier, cette égalité doit rester vraie modulo 3, donc $3a^3 + 8a^2 = 1 \mod 3$. or nous avons montré que l'équation ne possédait pas de solution dans $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Cette dernière égalité est donc impossible et on en déduit que l'entier a considéré ne peut pas exister. L'équation (E) ne possède pas de solution dans $\mathbf{Z}$: $\mathcal{S}_{\mathbf{Z}} = \emptyset$.

3. Cherchons désormais les solutions rationnelles de l'équation. Posons $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ où p et q sont des nombres entiers premiers entre eux.
   En supposant que r est solution de (E), obtenir des conditions sur p et q puis en déduire l'ensemble des solutions rationnelles de (E).

   Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux. Supposons que r est solution de (E).
   Alors $3(\frac{p}{q})^3 + 8(\frac{p}{q})^2 = 1$.
   Réduisons au même dénominateur : $\frac{3p^3+8p^2q}{q^3} = 1$.
   Faisons disparaître les dénominateurs : $3p^3 + 8p^2q = q^3$. C'est l'étape clé, il n'y a désormais plus que des nombres entiers, le problème est purement arithmétique.
   On factorise par q : $3p^3 = q(q^2 - 8p^2)$. Donc q divise $3p^3$. Comme q est premier avec p, on en déduit (avec le lemme de Gauss) que q divise 3. Donc $q = \pm 1$ ou $q = \pm 3$. De même, en factorisant par p, on obtient que p divise q^3 et $p = \pm 1$. On a trouvé quatre solutions potentielles : ± 1 et $\pm \frac{1}{3}$.
   Pour achever la preuve, il faut vérifier si ces nombres sont solutions ou pas de (E). On les injecte dans l'équation et on conclut que son unique solution rationnelle est $\frac{1}{3}$: $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}} = \{\frac{1}{3}\}$.

4. En déduire que l'on peut factoriser le polynôme $P = 3x^3 + 8x^2 - 1$ sous la forme $P = (3x - 1)(x^2 + ax + b)$ où a et b sont des nombres à déterminer. Conclure enfin en

calculant l'ensemble des solutions réelles et complexes de l'équation (E).

On é démontré que $\frac{1}{3}$ est racine du polynôme P, on peut donc le factoriser par $X - \frac{1}{3}$ ou également par $3X-1 = 3(X-\frac{1}{3})$. On obtient $P = (3X-1)(X^2+3X+1)$. Pour déterminer les racines complexes de P, il ne reste qu'à déterminer les racines du polynôme de degré 2 $X^2 + 3X + 1$. Il s'agit des nombres $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. L'ensemble des solutions réelles et complexes de l'équation est donc : $\mathcal{S}_{\mathbf{R}} = \mathcal{S}_{\mathbf{C}} = \{\frac{1}{3}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\}$.