Contrôle 2

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h15.
Le barème est donné à titre indicatif : 6 - 7 - 9.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Cubique de Tschirnhausen

On souhaite représenter la courbe $\mathcal{C}$ du plan définie par l'équation cartésienne $3y^2 = x^2 - x^3$:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 3y^2 = x^2 - x^3\}.$$

1. Démontrer que $\mathcal{C} = \{\ (1-3t^2\ ,\ t-3t^3)\ ;\ t \in \mathbf{R}\ \}$.
   Indication : pour démontrer une inclusion, on pourra poser $t = \frac{y}{x}$.
2. Considérer plusieurs valeurs de t dans $[-2, 2]$ et représenter quelques points de $\mathcal{C}$.
   Représenter ensuite l'allure générale de la courbe.

Exercice 2 Homographie du plan complexe

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} \setminus \{1\} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{2z + i}{z - 1} \end{array}$$

1. Démontrer que f est injective.
2. Déterminer l'image I de f.
3. Donner l'application réciproque de f définie de I vers $\mathbf{C} \setminus \{1\}$.
4. Déterminer, sans démonstration, les ensembles $f(\mathbf{R} \setminus \{1\})$ et $f^{-1}(i\mathbf{R})$.

Exercice 3 Théorème de Wilson

Le théorème de Wilson affirme que si p est un nombre premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \mod p$. Nous allons démontrer ce théorème.

1. Vérifier le théorème pour $p = 5$ et $p = 11$.
2. La conclusion du théorème reste-t-elle vraie si p n'est pas premier ?

   Passons à la démonstration du théorème. Soit $p \in \mathcal{P}$ et plaçons-nous dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
3. Soient $\bar{a}$ et $\bar{b}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Montrer que si $\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, alors $\bar{a} = \bar{0}$ ou $\bar{b} = \bar{0}$.
4. En déduire que l'équation $\bar{x}^2 - \bar{1} = \bar{0}$ n'a qu'au plus deux solutions $\bar{x}$ dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.
5. Soit $\bar{x} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ avec $\bar{x} \neq \bar{0}$.
   À l'aide de l'égalité de Bézout, montrer qu'il existe $\bar{y} \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ tel que $\bar{x}\bar{y} = \bar{1}$.
   Montrer de plus à l'aide des questions précédentes que $\bar{y}$ est unique et que si $\bar{x} \neq \pm\bar{1}$, alors $\bar{y} \neq \bar{x}$.
6. Démontrer le théorème de Wilson.
   Indication : dans le produit $(p-1)!$ *on regroupera chaque entier* x *(sauf 1 et* $p-1$*) avec l'entier* y *de la question précédente lui correspondant.*
   À défaut de rédiger une preuve complète, on pourra essayer d'en donner l'idée avec un exemple (prendre $p = 11$ *ou* $p = 13$*).*