STH1, Algèbre générale *novembre 2015*

Contrôle 2

Documents et calculatrices sont interdits.
Le barème est donné à titre indicatif : 4 - 4 - 7 - 6.

Exercice 1 Soit f l'application définie par
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & e^{1+\cos(x^2)}. \end{array}$$

1. La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Justifier.
2. Donner, sans justification, l'image $f(\mathbf{R})$ de cette application.

Exercice 2 Notons $\mathbf{I}$ l'ensemble des entiers positifs impairs et $\mathbf{Z}_-^*$ l'ensemble des entiers strictement négatifs.

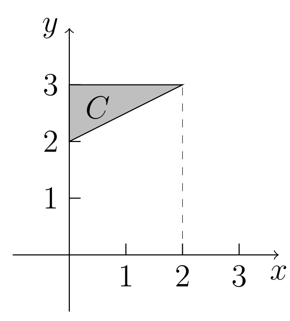
1. Montrer que l'application $g : \mathbf{I} \mapsto \mathbf{Z}_-^*$ par $g(n) = -\frac{n+1}{2}$ est une bijection.

2. On peut prolonger la fonction g en une fonction $\tilde{g} : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{Z}$ par
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \tilde{g}(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
C'est encore une bijection.
Déterminer la bijection réciproque de $\tilde{g}$.

Exercice 3 On définit les parties de $\mathbf{R}^2$ suivantes

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 3 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 6-2x\} \quad \text{et} \quad B = \{(1+\cos(\theta), 1+\sin(\theta))\ ;\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

1. Représenter dans le plan les ensembles A et B (sans justification).
2. Démontrer que $B \subset A$.
3. Soit C la partie du plan représentée ci-contre.
(Les bords du domaine sont inclus dans C.)
Définir mathématiquement cet ensemble.
4. Démontrer que C n'est pas inclus dans A et que B et C sont disjoints.



Exercice 4

1. Donner la liste des valeurs de $2^n + n$ modulo 5 pour n entier variant de 0 à 20.
Pour quelles valeurs le résultat est-il nul ?
2. Soient a et k des entiers positifs et $b = a + 20k$. Montrer que $2^b + b = 2^a + a$ modulo 5.
3. En déduire l'ensemble de tous les entiers naturels n pour lesquels 5 divise $2^n + n$.
4. Sans donner de justifications, déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels 3 divise $2^n + n$.