

CONTRÔLE 2

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 1h20.

Le barème est donné à titre indicatif : 6, 5, 4, 5.

Exercice 1 Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie pour x dans \mathbf{R} par $\varphi(x) = \sqrt{e^x + 1}$.

1. Montrer que φ est injective.
2. Déterminer l'image A de φ .
3. Déterminer l'application $\psi : A \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\psi \circ \varphi = Id_{\mathbf{R}}$,
i.e. telle que $\forall x \in \mathbf{R}, \psi \circ \varphi(x) = x$.

Exercice 2 Soit $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$.

1. Représenter dans le plan l'ensemble E .
2. Montrer que $E = \{(x, \lambda\sqrt{1-x}) \in \mathbf{R}^2; x \in [0, 1], \lambda \in [-1, 1]\}$.

Exercice 3 On définit sur \mathbf{R}^* la relation

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2, x \mathcal{R} y \text{ si } \frac{x}{y} \in \mathbf{Q}.$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence et donner la classe d'équivalence de 1.

Exercice 4

1. Soient a et n des entiers premiers entre eux.
Montrer qu'il existe un entier b tel que $ab = 1 \pmod{n}$.
Autrement dit, \bar{b} est l'inverse de \bar{a} dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
2. Déterminer l'inverse de $\bar{5}$ dans $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$.
3. Démontrer que $\bar{5}$ n'a pas d'inverse dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.