

CORRIGÉ DU CONTRÔLE 2

Exercice 1 Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie pour x dans $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \sqrt{e^x + 1}$.

1. Montrons que φ est injective. Soient x et x' dans $\mathbf{R}$ tels que $\varphi(x) = \varphi(x')$. Montrons que $x = x'$. On a $\sqrt{e^x + 1} = \sqrt{e^{x'} + 1}$. Alors $e^x + 1 = e^{x'} + 1$. Donc $e^x = e^{x'}$ et finalement $x = x'$.

Ainsi φ est bien injective.

On peut également affirmer que les fonctions $f : x \mapsto e^x$, $g : x \mapsto x+1$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$ sont des fonctions injectives. Or $\varphi = h \circ g \circ f$. Donc, comme composée de fonctions injectives, φ est injective.

2. Notons $A = \varphi(\mathbf{R})$. Montrons que $A =]1, +\infty[$.

Commençons par montrer $A \subset]1, +\infty[$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $e^x > 0$. Donc $e^x + 1 > 1$ et $\sqrt{e^x + 1} > 1$. Ainsi $\varphi(x) > 1$. Donc $A \subset]1, +\infty[$.

Montrons $]1, +\infty[\subset A$. Soit $y \in]1, +\infty[$. Ainsi $y^2 - 1 > 0$. Posons alors $x = \ln(y^2 - 1)$. Alors $\varphi(x) = \sqrt{e^{\ln(y^2 - 1)} + 1} = \sqrt{y^2} = y$ car y est positif. Ainsi, y est bien dans l'image de φ . Donc $]1, +\infty[\subset A$.

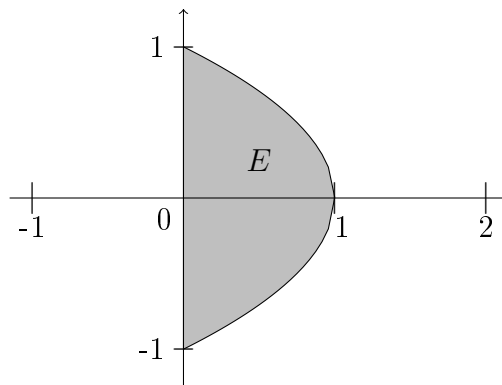
Par double inclusion, on a démontré $A =]1, +\infty[$.

3. Comme φ est injective et qu'elle est trivialement surjective sur son image, on peut voir φ comme une bijection de $\mathbf{R}$ vers A . La question posée revient à trouver sa bijection réciproque.

On l'a en fait déterminée dans la question précédente. Posons ψ définie sur A par $\psi(y) = \ln(y^2 - 1)$. On peut alors vérifier que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\psi \circ \varphi(x) = x$.

Exercice 2 Soit $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 - y^2\}$.

1. Représenter dans le plan l'ensemble E . L'ensemble E est délimité à gauche par l'axe Oy et à droite par la parabole d'équation $x = 1 - y^2$.



2. Montrons que $E \subset F = \{(x, \lambda\sqrt{1-x}) \in \mathbf{R}^2; x \in [0, 1], \lambda \in [-1, 1]\}$. Soit $(x, y) \in E$. Alors $0 \leq x \leq 1 - y^2$. En particulier, $0 \leq x \leq 1$, donc $x \in [0, 1]$. De plus $y^2 \leq 1 - x$. Donc $|y| \leq \sqrt{1 - x}$. Donc il existe $a \in [0, 1]$ tel que $|y| = a\sqrt{1 - x}$. En considérant le signe de y , on en déduit qu'il existe $\lambda \in [-1, 1]$ tel que $y = \lambda\sqrt{1 - x}$. Ainsi $(x, y) = (x, \lambda\sqrt{1 - x})$ avec $x \in [0, 1]$ et $\lambda \in [-1, 1]$. Donc $(x, y) \in F$ et $E \subset F$.

Montrons que $F \subset E$. Soit $(x, y) \in F$. Alors $x \in [0, 1]$ et il existe $\lambda \in [-1, 1]$ tel que $y = \lambda\sqrt{1 - x}$. Alors $|y| \leq \sqrt{1 - x}$ et $y^2 \leq 1 - x$. Donc finalement, $0 \leq x \leq 1 - y^2$. Ainsi

$(x, y) \in E$ et $F \subset E$.

Par double inclusion on a montré $E = F$.

Exercice 3 On définit sur $\mathbf{R}^*$ la relation

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2, \quad x \mathcal{R} y \text{ si } \frac{x}{y} \in \mathbf{Q}.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner la classe d'équivalence de 1.

$\mathcal{R}$ est réflexive : soit $x \in \mathbf{R}^*$. Alors $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbf{Q}$. Donc $x \mathcal{R} x$.

$\mathcal{R}$ est symétrique : soient x et y dans $\mathbf{R}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$. Ainsi $\frac{x}{y} \in \mathbf{Q}$. Donc son inverse $\frac{y}{x}$ est également un nombre rationnel. Donc $y \mathcal{R} x$.

$\mathcal{R}$ est transitive : soient x, y et z dans $\mathbf{R}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$. Alors $\frac{x}{y}$ et $\frac{y}{z}$ sont des rationnels. Donc leur produit $\frac{xy}{yz} = \frac{x}{z}$ est rationnel. Donc $x \mathcal{R} z$.

La classe d'équivalence de 1 est définie par

$$C_1 = \{x \in \mathbf{R}^* \mid x \mathcal{R} 1\} = \{x \in \mathbf{R}^* \mid \frac{x}{1} \in \mathbf{Q}\}.$$

Autrement dit $C_1 = \mathbf{Q}^*$.

Exercice 4

1. Soient a et n des entiers premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers relatifs b et c tels que

$$ab + cn = 1.$$

Alors $ab = 1 - cn$. Donc $ab = 1 \pmod{n}$.

Autrement dit, $\bar{b}$ est l'inverse de $\bar{a}$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

2. Dans $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$, on a $\bar{5} \times \bar{2} = \bar{1}$. Donc 2 est l'inverse de 5 modulo 9.

Dans $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$, on a $\bar{5} \times \bar{9} = \bar{1}$. Donc 9 est l'inverse de 5 modulo 11.

Dans $\mathbf{Z}/17\mathbf{Z}$, on a $\bar{5} \times \bar{7} = \bar{1}$. Donc 7 est l'inverse de 5 modulo 17.

.

3. Démontrons que $\bar{5}$ n'a pas d'inverse dans $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$. On pourrait considérer les 10 éléments $\bar{n}$ de $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ et constater que le produit $\bar{5} \times \bar{n}$ n'est jamais égal à 1. Voilà un autre raisonnement :

Supposons qu'il existe un entier n tel que $5 \times n = 1 \pmod{10}$. Donc il existe un entier k tel que $5n = 1 + 10k$. Donc $1 = 5n - 10k$ ce qui implique que 1 est divisible par 5, ce qui est absurde. Ainsi 5 n'a pas d'inverse modulo 10.