Contrôle 2

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 *(7 points)*

Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C} \setminus \{2\} &\to \mathbf{C} \\ z &\mapsto \frac{z+1}{z-2}. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que 1 n'est pas dans l'image de f. On peut alors définir l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbf{C} \setminus \{2\} &\to \mathbf{C} \setminus \{1\} \\ z &\mapsto \frac{z+1}{z-2}. \end{aligned}$$

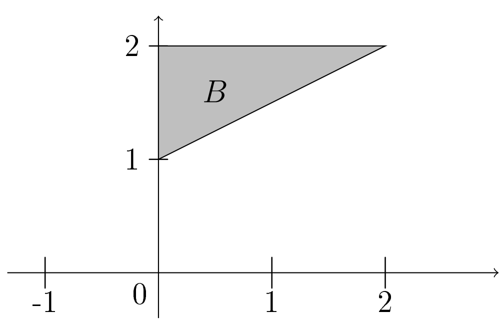
3. Montrer que g est surjective.
4. En déduire que g est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 2 *(6 points)*

1. Représenter dans le plan la partie A de $\mathbf{R}^2$ définie par

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 < 9\}.$$

2. Définir mathématiquement la partie B de $\mathbf{R}^2$ représentée ci-dessous (les bords sont inclus dans B).



3. Démontrer mathématiquement que $B \subset A$.

Exercice 3 *(6 points)*

On définit sur $(\mathbf{Z}^*)^2$ la relation

$$\forall (a,b) \in (\mathbf{Z}^*)^2, \forall (c,d) \in (\mathbf{Z}^*)^2,\ (a,b)\mathcal{R}(c,d) \text{ si et seulement si } abcd > 0.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de $(1,1)$.
3. Déterminer le cardinal de l'ensemble quotient $(\mathbf{Z}^*)^2/\mathcal{R}$.