Corrigé du contrôle 2

Exercice 1

Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C} \setminus \{2\} &\to \mathbf{C} \\ z &\mapsto \frac{z+1}{z-2}. \end{aligned}$$

1. Montrons que f est injective.
   Soient z et z' dans $\mathbf{C} \setminus \{2\}$ tels que $f(z) = f(z')$. Alors $\frac{z+1}{z-2} = \frac{z'+1}{z'-2}$, donc $(z+1)(z'-2) = (z'+1)(z-2)$. Donc $zz' + z' - 2z - 2 = zz' + z - 2z' - 2$.
   Ainsi $3z = 3z'$ et donc $z = z'$.
   On en déduit que f est injective.
2. Montrons que 1 n'est pas dans l'image de f.
   Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{2\}$. Alors $z + 1 \neq z - 2$. Donc $\frac{z+1}{z-2} \neq 1$, *i.e.* $f(z) \neq 1$.
   Ainsi $\forall z \in \mathbf{C} \setminus \{2\},\ f(z) \neq 1$. Cela signifie que 1 n'est pas dans l'image de f.

   On peut alors définir l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbf{C} \setminus \{2\} &\to \mathbf{C} \setminus \{1\} \\ z &\mapsto \frac{z+1}{z-2}. \end{aligned}$$

3. Montrons que g est surjective.
   Soit $y \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$. (On effectue une travail d'analyse pour trouver z tel que $\frac{z+1}{z-2} = y$.)
   Soit $z = 2 + \frac{3}{y-1}$ (ou $\frac{2y+1}{y-1}$ c'est pareil). Remarquons que z est bien défini car $y \neq 1$. Alors

$$f(z) = \frac{2 + \frac{3}{y-1} + 1}{2 + \frac{3}{y-1} - 2} = \frac{\frac{3y}{y-1}}{2 + \frac{3}{y-1}} = y.$$

   Nous avons donc montré que tout élément y de $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ a un antécédent par f. Donc f est surjective.
4. Comme f est injective, g l'est également. Et comme g est également surjective, elle est bijective. Enfin, sa bijection réciproque a en fait été déterminée à la question précédente. Il s'agit de l'application

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbf{C} \setminus \{1\} &\to \mathbf{C} \setminus \{2\} \\ y &\mapsto 2 + \frac{3}{y-1}. \end{aligned}$$

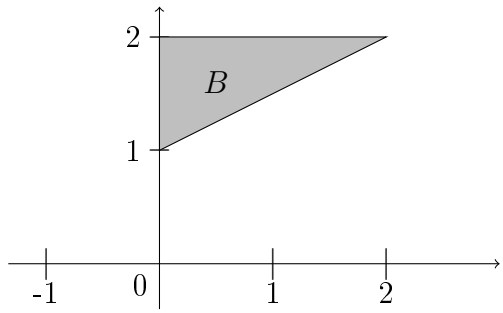
Exercice 2

1. Représenter dans le plan la partie A de $\mathbf{R}^2$ définie par

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 < 9\}.$$

   La partie A est le quart de disque de centre 0 et de rayon 3 situé dans $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. Les bords horizontaux et verticaux de A sont inclus dans A, mais pas le bord circulaire.

2. Définir mathématiquement la partie B de $\mathbf{R}^2$ représentée ci-dessous (les bords sont inclus dans B).



B est délimité par trois droites d'équations $x = 0$, $y = 2$ et $y = \frac{x}{2} + 1$.

$$B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 1 + \frac{x}{2} \leq y \leq 2\}.$$

3. Montrons que $B \subset A$.
Soit $(x, y) \in B$. Alors $0 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 2$. Donc $x^2 + y^2 \leq 2^2 + 2^2 = 8$. Ainsi, $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 < 9$. Donc $(x, y) \in A$.
On en déduit $B \subset A$.

Exercice 3

On définit sur $(\mathbf{Z}^*)^2$ la relation

$$\forall (a, b) \in (\mathbf{Z}^*)^2, \forall (c, d) \in (\mathbf{Z}^*)^2,\ (a, b)\mathcal{R}(c, d) \text{ si et seulement si } abcd > 0.$$

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Soit $(a, b) \in (\mathbf{Z}^*)^2$. Comme $abab = a^2b^2$, on obtient $abab > 0$. Donc $(a, b)\mathcal{R}(a, b)$.
Le relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.

Soient (a, b) et (c, d) dans $(\mathbf{Z}^*)^2$ tels que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$. Alors $abcd > 0$. Donc $cdab > 0$.
La relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique.

Soient (a, b), (c, d) et (e, f) dans $(\mathbf{Z}^*)^2$ tels que $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ et $(c, d)\mathcal{R}(e, f)$. Alors $abcd > 0$ et $cdef > 0$. Donc $ab(cd)^2ef > 0$. Comme $(cd)^2 > 0$, on en déduit $abef > 0$. Donc $(a, b)\mathcal{R}(e, f)$.
La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

2. La classe d'équivalence de $(1, 1)$ est l'ensemble des couples en relation avec $(1, 1)$. Donc

$$C_{(1,1)} = \{(a, b) \in (\mathbf{Z}^*)^2 \mid ab > 0\}.$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des couples d'entiers non nuls de même signe : $C_{(1,1)} = (\mathbf{Z}_+^*)^2 \cup (\mathbf{Z}_-^*)^2$.

3. De même, on obtient que la classe de $(1, -1)$ est l'ensemble des couples de signes opposés : $C_{(1,-1)} = \mathbf{Z}_+^* \times \mathbf{Z}_-^* \cup \mathbf{Z}_-^* \times \mathbf{Z}_+^*$. Ces deux classes d'équivalence recouvrant l'ensemble $(\mathbf{Z}^*)^2$ tout entier, on déduit qu'il n'y a pas d'autres classes d'équivalence.
Ainsi le cardinal de l'ensemble quotient $(\mathbf{Z}^*)^2/\mathcal{R}$ est 2.