Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 35 minutes.
Le barème est donné à titre indicatif : 3,5 - 4,5 - 2,5.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $|3\sqrt{x}-1| = x+1$

On distinguera plusieurs cas et on détaillera avec rigueur les étapes de la résolution. Enfin, on vérifiera la validité des solutions obtenues.

Commençons par chercher les solutions de l'équation par un travail d'analyse. Soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $|3\sqrt{x}-1| = x+1$.
Remarquons déjà que x doit être positif pour que $\sqrt{x}$ soit bien défini.

Pour traiter la valeur absolue, nous distinguons deux cas :
- Si $3\sqrt{x}-1 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant \frac{1}{9}$, alors l'égalité devient : $3\sqrt{x}-1 = x+1$.

Isolons $\sqrt{x}$: $3\sqrt{x} = x+2$.
Alors, en élevant au carré : $9x = x^2+4x+4$.
Ainsi : $x^2-5x+4=0$.
Nous reconnaissons une équation de degré 2 de discriminant 9. Ses racines sont 4 et 1.
Nous remarquons que ces deux valeurs satisfont la condition initiale $x \geqslant \frac{1}{9}$.

- Si $3\sqrt{x}-1 < 0$, c'est-à-dire si $x < \frac{1}{9}$, alors l'égalité devient : $1-3\sqrt{x} = x+1$.

Isolons $\sqrt{x}$: $-3\sqrt{x} = x$.
Alors, en élevant au carré : $9x = x^2$.
Ainsi : $x=0$ ou $x=9$.
Nous remarquons que cette deuxième valeur ne satisfait pas la condition initiale $x < \frac{1}{9}$.

Notre travail d'analyse nous a permis de démontrer que si x est solution de l'égalité, alors x est égal à l'une de ces quatre valeurs : 0, 1, 4, 9. Vérifions :

$$|3\sqrt{0}-1| = 1 = 0+1, \quad |3\sqrt{1}-1| = 2 = 1+1, \quad |3\sqrt{4}-1| = 5 = 4+1, \quad |3\sqrt{9}-1| = 8 \neq 9+1.$$

Nous constatons, de manière cohérente avec ce qui a été écrit plus haut, que 9 n'est pas solution. En revanche, les trois autres valeurs sont bien solutions de l'équation. Nous pouvons conclure que l'ensemble des solutions de l'équation est : $\{0,1,4\}$.

Exercice 2

On considère la proposition P suivante :

Si un nombre entier divise deux nombres entiers, alors son carré divise leur produit.

1. Traduire en langage mathématique la proposition P.
   On pourra utiliser le symbole | de divisibilité.

$$P:\ \forall n\in\mathbf{Z},\forall a\in\mathbf{Z},\forall b\in\mathbf{Z},\quad [n|a \text{ et } n|b] \implies n^2|ab$$

2. Donner, en langage mathématique, la réciproque R, la contraposée C et la négation $\neg P$ de P, ainsi que la négation $\neg R$ de R.

$$R:\forall n\in\mathbf{Z},\forall a\in\mathbf{Z},\forall b\in\mathbf{Z},\quad n^2|ab \implies [n|a \text{ et } n|b]$$

$$C:\forall n\in\mathbf{Z},\forall a\in\mathbf{Z},\forall b\in\mathbf{Z},\quad n^2\nmid ab \implies [n\nmid a \text{ ou } n\nmid b]$$

$$\neg P:\ \exists n\in\mathbf{Z},\exists a\in\mathbf{Z},\exists b\in\mathbf{Z},\quad [n|a \text{ et } n|b] \text{ et } n^2|\nmid ab$$

$$\neg R:\ \exists n\in\mathbf{Z},\exists a\in\mathbf{Z},\exists b\in\mathbf{Z},\quad n^2|ab \text{ et } [n\nmid a \text{ ou } n\nmid b]$$

3. Démontrer ou infirmer P.

   Démontrons la proposition P :
   Soient n, a et b des nombres entiers.
   Supposons que $n|a$ et $n|b$.
   Alors : $\exists k\in\mathbf{Z}, a=kn$ et $\exists\ell, b=\ell n$.
   Alors : $ab=kn\ell n=(k\ell)n^2$.
   Comme $k\ell$ est un entier, nous déduisons que n^2 divise ab.
   Nous avons bien montré l'implication et la proposition P est donc vraie.

4. Démontrer ou infirmer R.

   Infirmons la proposition R en démontrant sa négation.
   Posons $n=2$, $a=12$ et $b=1$.
   Alors, comme $4|12$, nous avons $n^2|ab$.
   Mais $2\nmid 1$, donc n ne divise pas b.
   Ainsi il existe bien des entiers n, a et b tels que : $n^2|ab$ mais $[n\nmid a$ ou $n\nmid b]$.
   La proposition $\neg R$ est donc vraie, et R est fausse.

Exercice 3

Soit f une fonction réelle. Nous considérons les propositions Q_1 et Q_2 relatives à f :

$$Q_1:\ \exists T\in\mathbf{R}_+^*,\forall x\in\mathbf{R},\ \ f(x+T)=f(x)\quad;\quad Q_2:\ \forall x\in\mathbf{R},\forall y\in\mathbf{R},\ x<y\implies f(x)<f(y).$$

1. Comment s'appelle une fonction satisfaisant la proposition Q_1 ? Même question avec Q_2.

   Une fonction satisfaisant Q_1 est une **fonction périodique**. Le nombre T apparaissant dans la proposition est alors une période de f : f est T-périodique. Remarque : cette période T n'est pas unique ; si f est T-périodique, alors elle est aussi $2T$-périodique, $3T$-périodique, etc.

   Une fonction satisfaisant Q_2 est une **fonction strictement croissante**.

2. Existe-t-il une fonction satisfaisant à la fois la proposition Q_1 et la proposition Q_2 ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur les énoncés des propositions ci-dessus.

   Une telle fonction n'existe pas : $\forall f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, [Q_1 \text{ et } Q_2]$ est fausse.
   Nous pourrions raisonner en passant à la négation et en montrant que

   $$\neg[Q_1 \text{ et } Q_2] \equiv [\neg Q_1 \text{ ou } \neg Q_2]$$

   est toujours vraie. Ce n'est pas la façons la plus simple de raisonner ici. Nous proposons la preuve ci-dessous.

   Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une fonction f satisfaisant Q_1 et Q_2.
   Donc : $\exists T \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R},\ f(x+T) = f(x)$ et $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R},\ x < y \implies f(x) < f(y)$.
   Posons $x = 3$ (valeur arbitraire, n'importe quelle valeur aurait convenu).
   D'après la première proposition, $f(3 + T) = f(3)$.
   Or T est un réel strictement positif.
   Donc $3 < 3 + T$.
   D'après la seconde proposition, en posant $y = 3 + T$, nous déduisons : $f(3) < f(3 + T)$.
   Or nous savons que $f(3 + T) = f(3)$.
   Nos deux propositions aboutissent donc à une contradiction.
   Notre fonction f ne peut donc pas exister.