Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 35 minutes.
Le barème est donné à titre indicatif : 5 - 5.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1

1. Démontrer : $\forall n \in \mathbf{N},\quad n \text{ pair} \implies n+2 \text{ pair}$.
2. Énoncer la réciproque et la contraposée de la proposition précédente. Sans donner de justification, préciser si elles sont vraies ou fausses.
3. Soit A un ensemble d'entiers naturels. Traduire en langage mathématique la proposition :

   « L'ensemble A possède un plus grand élément. »
4. Démontrer par récurrence la proposition : pour tout entier n non nul, toute partie de $\mathbf{N}$ à n éléments possède un plus grand élément.

   Dit autrement, cette proposition signifie que toute partie finie non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus grand élément.
5. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et de ce qui précède, que l'ensemble des nombres entiers naturels pairs est infini.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{N}$ à valeurs réelles.

1. Traduire en langage usuel la proposition :

$$P : \quad \exists a \in \mathbf{N},\ \forall b \in \mathbf{N},\quad f(a) \leqslant f(b).$$

2. Donner la négation en langage mathématique de cette proposition.
3. Soit f définie sur $\mathbf{N}$ par $f(n) = n^2 - 2n + 2$. Démontrer ou infirmer la proposition P pour cette fonction.
4. Soit g définie sur $\mathbf{N}$ par $g(m) = \dfrac{1}{m+1}$. Même question.

   Attention, f et g ne sont pas des fonctions réelles, on évitera d'utiliser des arguments d'études de fonctions peu pertinents pour ces cas.