

CONTRÔLE 1

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 40 minutes.

Le barème est donné à titre indicatif : 7 - 4.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels. On considère la proposition P suivante qui concerne cette suite.

$$\exists M \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M.$$

- Traduire la proposition en langage courant.

Trois réponses : « La suite est majorée. » « Elle admet un majorant. » « Il existe un nombre réel supérieur à tous les termes de la suite. »

- Donner la négation de P en langage mathématique.

$$\neg P : \forall M, \exists n \in \mathbf{N}, u_n > M.$$

- On considère la suite définie par $u_n = n \times (-1)^n$. Démontrer ou infirmer la proposition P pour cette suite.

La proposition P est fausse pour cette suite. On constate en effet que cette suite peut prendre des valeurs arbitrairement grandes (quand n est pair) et n'est donc pas majorée. Démontrons-le avec la définition de $\neg P$:

Soit $M \in \mathbf{R}$.

Soit n un entier pair strictement supérieur à M . Si $M < 0$, on peut prendre $n = 0$, sinon on peut choisir $n = E(M) + 1$ ou $E(M) + 2$ selon la parité de la partie entière $E(M)$ de M .

Alors $n > M$, et comme n est pair, $u_n = (-1)^n \times n = n$.

Donc $u_n > M$.

Nous avons bien montré : $\forall M, \exists n \in \mathbf{N}, u_n > M$.

Donc $\neg P$ est vraie et P est fausse.

On considère maintenant la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

$$u_1 = u_0 + \frac{1}{(0+1)^2} = 1, \quad u_2 = u_1 + \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{5}{4} \text{ et } u_3 = u_2 + \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{49}{36}.$$

- Démontrer : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} - \frac{n}{n(n+1)^2} - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1 - n - n^2 - n}{n(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n(n+1)^2} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

On en déduit bien $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1}$.

6. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Attention, la proposition n'est valable qu'à partir de $n = 1$. Il faut donc initialiser à $n = 1$.

Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = 1$ et on a bien $1 \leq 2 - \frac{1}{1}$.

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}^*$. Supposons que $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

Alors $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

Or nous avons montré que $\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{1}{n+1}$, donc $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

Ainsi $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

Par récurrence, le résultat est démontré pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

7. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisfait la proposition P .

Posons $M = 2$. Montrons : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \leq M$.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

Si $n = 0$, alors $u_0 = 0 \leq 2$.

Si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ d'après la question précédente, donc $u_n \leq 2$.

Ainsi, dans tous les cas, $u_n \leq 2$: la suite est majorée par 2.

Exercice 2

Considérons la proposition Q :

« Il existe deux entiers relatifs non nuls tels que leur somme soit égale à leur produit. »

1. Traduire cette proposition en langage mathématique.

$$Q : \exists a \in \mathbf{Z}^*, \exists b \in \mathbf{Z}^*, a+b = ab \quad \text{ou} \quad Q : \exists a \in \mathbf{Z}, \exists b \in \mathbf{Z}, a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a+b = ab.$$

2. Donner sa négation en langage mathématique.

$$\neg Q : \forall a \in \mathbf{Z}^*, \forall b \in \mathbf{Z}^*, \quad a + b \neq ab$$

3. Démontrer la proposition Q .

Posons $a = 2$ et $b = 2$. Alors a et b sont bien des entiers relatifs non nuls et $a + b = 4 = ab$.

4. Montrer qu'il y a unicité des deux entiers satisfaisant la proposition.

Indication : on pourra montrer que si deux entiers satisfont la propriété, alors nécessairement, chacun d'eux est divisible par son prédécesseur.

Soient a et b deux entiers non nuls qui satisfont $a + b = ab$.

Alors $b = ab - a$, donc $b = a(b - 1)$.

Comme il s'agit d'entiers, on en déduit que $b - 1$ divise b (et aussi que a divise b).

Or les seuls entiers divisibles par leur prédécesseur sont 0 (qui est divisible par -1) et 2 (qui est divisible par 1).

Or $b \neq 0$, donc $b = 2$.

On en déduit alors que $a = 2$.

Comme nous savons déjà que $(a, b) = (2, 2)$ est bien solution, nous avons démontré qu'il ne pouvait pas y en avoir d'autre.