CONTRÔLE 1

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 40 minutes.

Le barème est donné à titre indicatif : 4,5 - 3,5 - 3,5.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : une implication

On considère la proposition

$$P : \forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, ab \geq 20 \implies a > 4 \text{ ou } b > 4.$$

1. Traduire la proposition P en langage courant (c'est-à-dire en n'utilisant aucun symbole mathématique hormis les nombres).
2. Donner, en langage mathématique, la contraposée C , la réciproque R et la négation N de R .
3. Démontrer ou infirmer les propositions P et R .

Exercice 2 : une équation

Considérons la proposition

$$Q : \exists x \in \mathbf{R}, |x + 1| = 2x + 9.$$

1. Démontrer Q en raisonnant par analyse-synthèse.
2. Démontrer encore Q en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.
3. Y a-t-il unicité de x dans la proposition Q ?

On pourra justifier la réponse en donnant simplement un argument clair, sans en rédiger les détails.

Exercice 3 : fonction positive à droite

1. Soit f une fonction réelle. Définir en langage mathématique la proposition :

« La fonction f est positive à partir d'une certaine valeur réelle. »

2. Les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 7$ et $g : x \mapsto \cos(x)$ satisfont-elles cette proposition ? Justifier vos réponses en vous basant sur la définition mathématique précédente ou sa négation.