Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 40 minutes.
Le barème est donné à titre indicatif : 4,5 - 3,5 - 3,5.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : une implication

On considère la proposition

$$P: \quad \forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N},\ ab \geqslant 20 \implies a > 4 \text{ ou } b > 4.$$

1. Traduire la proposition P en langage courant (c'est-à-dire en n'utilisant aucun symbole mathématique hormis les nombres).

   Si un produit d'entiers naturels est supérieur à 20, alors l'un des facteurs est strictement supérieur à 4.

2. Donner, en langage mathématique, la contraposée C, la réciproque R et la négation N de R.

$$C: \quad \forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N},\ a \leqslant 4 \text{ et } b \leqslant 4 \implies ab < 20.$$
$$R: \quad \forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N},\ a > 4 \text{ ou } b > 4 \implies ab \geqslant 20.$$
$$N: \quad \exists a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N},\ [a > 4 \text{ ou } b > 4] \text{ et } ab < 20.$$

3. Démontrer ou infirmer les propositions P et R.

   Démontrons P par contraposée.
   Soient a et b dans $\mathbf{N}$. Supposons $a \leqslant 4$ et $b \leqslant 4$. Alors $ab \leqslant 16$, donc $ab < 20$.
   Ainsi C et donc P sont démontrées.

   Infirmons R en démontrant N : posons $a = 5$ et $b = 2$. On a bien [$a > 4$ ou $b > 4$ et $ab = 10 < 20$. Ainsi, nous avons montré : $\exists a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N},\ [a > 4 \text{ ou } b > 4] \text{ et } ab < 20$.

Exercice 2 : une équation

Considérons la proposition

$$Q \quad : \quad \exists x \in \mathbf{R},\ |x+1| = 2x + 9.$$

1. Démontrer Q en raisonnant par analyse-synthèse.

   Posons $x = -\frac{10}{3}$. Alors $|x+1| = |-\frac{7}{3}| = \frac{7}{3}$ et $2x+9 = -\frac{20}{3} + \frac{27}{3} = \frac{7}{3}$. On obtient bien $|x+1| = 2x+9$.

2. Démontrer encore Q en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = |x+1| - 2x - 9$. Alors f est une fonction continue et : $f(0) = -8$ et $f(-4) = 2$. D'après le TVI, il existe $x \in]-4, 0[$ tel que $f(x) = 0$. Donc $\exists x \in \mathbf{R},\ |x+1| = 2x+9$.

3. Y a-t-il unicité de x dans la proposition Q ?
   On pourra justifier la réponse en donnant simplement un argument clair, sans en rédiger les détails.

   Il y a unicité de x. Lorsqu'on résout l'équation $|x+1| = 2x+9$, on distingue les cas $x+1 \geqslant 0$ et $x+1 < 0$ et on obtient ainsi deux candidats : -8 et $-\frac{10}{3}$. Mais après vérification, seul $-\frac{10}{3}$ est solution de l'équation.
   Autre argument : l'étude de la fonction f montre qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$. Elle ne peut donc passer qu'une seule fois par la valeur 0. Si elle existe (ce que nous avons démontré) la solution de notre problème est unique.

Exercice 3 : fonction positive à droite

1. Soit f une fonction réelle. Définir en langage mathématique la proposition :

   « La fonction f est positive à partir d'une certaine valeur réelle. »

   $$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad y \geqslant x \implies f(y) \geqslant 0.$$

2. Les fonctions $f : x \mapsto x^2 - 7$ et $g : x \mapsto \cos(x)$ satisfont-elles cette proposition ? Justifier vos réponses en vous basant sur la définition mathématique précédente ou sa négation.

   La fonction f satisfait la propriété :
   Soit $x = \sqrt{7}$. Soit $y \in \mathbf{R}$ tel que $y \geqslant x$. Alors $y^2 \geqslant 7$, donc $y^2 - 7 \geqslant 0$. Ainsi, pour tout y supérieur à $\sqrt{7}$, on a bien $f(y) \geqslant 0$.

   La fonction g ne satisfait pas la propriété. Montrons sa négation :

   $$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, y \geqslant x \text{ et } g(y) < 0.$$

   Soit $x \in R$. Soit y un multiple impair de π supérieur à x (un tel y existe d'après la propriété archimédienne de $\mathbf{R}$). Alors $\cos(y) = -1$. Nous avons bien démontré la négation de la propriété pour g.