

CONTRÔLE 1

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 40 minutes.

Le barème est donné à titre indicatif : 5 - 5.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : une question de parité

On considère la proposition P suivante :

« Si la somme de deux entiers naturels est impaire, alors l'un des deux entiers est impair. »

1. Traduire cette proposition en langage mathématique.
2. Donner (en langage courant ou en langage mathématique) la réciproque R et la contraposée C de P .
3. Démontrer ou infirmer P .
4. Démontrer ou infirmer R .

Exercice 2 : équations

On considère la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

1. On considère la proposition suivante : $\forall x \in \mathbf{R}^*, f(\frac{1}{x}) = f(x)$.
Traduire cette proposition en langage courant, sans aucun symbole mathématique hormis f .
2. Démontrer cette proposition.
3. Démontrer la proposition suivante : $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2}$.
4. La proposition suivante est-elle vraie : $\exists ! x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{2}$?
5. Infirmer la proposition suivante : $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = -2$.
On commencera par donner sa négation.