Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 40 minutes.
Le barème est donné à titre indicatif : 5 - 5.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 : une question de parité

On considère la proposition P suivante :

« Si la somme de deux entiers naturels est impaire, alors l'un des deux entiers est impair. »

1. Traduire cette proposition en langage mathématique.

$$\forall a \in \mathbf{N},\ \forall b \in \mathbf{N},\ \ [\exists i \in \mathbf{N}, a+b = 2i+1] \implies [\exists j \in \mathbf{N}, a = 2j+1 \ \text{ ou } \ \exists \ell \in \mathbf{N}, b = 2\ell+1].$$

2. Donner (en langage courant ou en langage mathématique) la réciproque R et la contraposée C de P.

R : « Étant donnés deux entiers, si l'un d'eux est impair, alors leur somme est impaire. »

$$\forall a \in \mathbf{N},\ \forall b \in \mathbf{N},\ \ [\exists j \in \mathbf{N}, a = 2j+1 \ \text{ ou } \ \exists \ell \in \mathbf{N}, b = 2\ell+1] \implies [\exists i \in \mathbf{N}, a+b = 2i+1].$$

C : « Si deux entiers sont pairs, alors leur somme est paire. »

$$\forall a \in \mathbf{N},\ \forall b \in \mathbf{N},\ \ [\exists j \in \mathbf{N}, a = 2j \ \text{ et } \ \exists \ell \in \mathbf{N}, b = 2\ell] \implies [\exists i \in \mathbf{N}, a+b = 2i].$$

En effet, la négation de « a ou b est impair »est « a et b sont pairs » et celle de « $a+b$ est impair » est « $a+b$ est pair ».

3. Démontrer ou infirmer P.

La proposition P est vraie. Pour la démontrer, on peut raisonner par contraposée en démontrant C :
Soient a et b dans $\mathbf{N}$.
Supposons que a et b sont pairs.
Alors $\exists i \in \mathbf{N}, a = 2i$ et $\exists j \in \mathbf{N}, a = 2j$.
Donc $a + b = 2i + 2j = 2(i + j)$.
Comme $i + j \in \mathbf{N}$, on conclut que $a + b$ est pair.
Ainsi la proposition C est vraie et par conséquent la proposition P l'est également.

4. Démontrer ou infirmer R.

   La proposition R est fausse. En effet, « a ou b impair » n'exclut pas que a et b peuvent être tous les deux impairs. Dans ce cas, leur somme est paire et non impaire. Rédigeons cela en exhibant un contre-exemple :
   Posons $a = 3$ et $b = 5$.
   Alors l'un des deux est bien impair (et même les deux).
   Mais $a + b = 8$ n'est pas impair.
   Ainsi, étant donné deux entiers, si l'un des deux est impair, on ne peut pas conclure en général que leur somme est impaire.
   La proposition R est donc fausse.

Exercice 2 : équations

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

1. On considère la proposition suivante : $\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f(\frac{1}{x}) = f(x)$.
   Traduire cette proposition en langage courant, sans aucun symbole mathématique hormis f.

   « L'image par f de tout nombre réel non nul est égale à l'image de son inverse. »

2. Démontrer cette proposition.

   Soit $x \in \mathbf{R}^*$. Calculons $f(\frac{1}{x})$:

   $$f(\tfrac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{\frac{2x^2}{x}}{\frac{x^2}{x^2} + x^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

   Ainsi, on obtient bien que $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.
   Le réel x étant supposé quelconque, la proposition est bien démontrée pour tout nombre réel non nul.

3. Démontrer la proposition suivante : $\exists x \in \mathbf{R},\quad f(x) = \frac{1}{2}$.

   Posons $x = 2 + \sqrt{3}$. Alors

   $$f(x) = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

   Ainsi, on a bien démontré qu'il existe un nombre réel x tel que $f(x) = \frac{1}{2}$.

   Remarque : le nombre x a été trouvé avec un travail d'analyse au brouillon. On a résolu l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ en se ramenant à une équation du second degré.

   Une autre preuve est possible en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires. La fonction f est en effet continue sur $\mathbf{R}$. De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Ainsi, le TVI permet d'affirmer que totues els valeurs comprises entre 0 et 1 sont prises par f et en particulier, il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$.

4. La proposition suivante est-elle vraie : $\exists! x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}$?

   Cette proposition est fausse. D'après la question précédente, il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = \frac{1}{2}$). Remarquons que $x \neq 0$, $x \neq 1$ et $x \neq -1$ car $f(0) \neq \frac{1}{2}$, $f(1) \neq \frac{1}{2}$ et $f(-1) \neq \frac{1}{2}$.
   Alors d'après la question 1, $f(\frac{1}{x}) = f(x) = \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{x}$.
   Il existe donc au moins deux nombres réels dont l'image par f est $\frac{1}{2}$. Il n'y a donc pas unicité.

   Remarque : le travail d'analyse effectué à la question précédente permet de trouver deux solutions à l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$: $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$. En vérifiant que $2-\sqrt{3}$ est également solution, on infirme l'unicité. Cela est cohérent avec ce qui a été dit plus haut car $2-\sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

5. Infirmer la proposition suivante : $\exists x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = -2$.
   On commencera par donner sa négation.

   La négation de cette proposition est : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \neq -2$. Démontrons cette négation.
   Soit $x \in \mathbf{R}$.
   On sait que $(x+1)^2 \geqslant 0$.
   Donc $x^2 + 2x + 1 \geqslant 0$.
   Donc $2x \geqslant -(x^2+1)$.
   Donc $\frac{2x}{x^2+1} \geqslant -1$.
   Ainsi $f(x) \geqslant -1$ et en particulier $f(x) \neq -2$.
   Nous avons bien montré : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq -2$.