

CONTRÔLE 1

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 40 minutes.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice : fonctions paires et impaires

On notera $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions définies de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1. Définitions

On dit qu'une fonction réelle $f \in \mathcal{F}$ est **paire** si :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

- (a) Traduire en langage courant (sans aucun terme mathématique) cette définition.
- (b) Donner sa négation en langage mathématique.
- (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^3 - x + 1$. Démontrer que g n'est pas une fonction paire.
- (d) Donner la définition mathématique d'une fonction **impaire**.
- (e) Démontrer que la seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle :

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad [f \text{ paire et impaire}] \implies [\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = 0].$$

Nous souhaitons dans la suite démontrer que toute fonction réelle peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$P : \forall f \in \mathcal{F}, \exists p \in \mathcal{F}, \exists i \in \mathcal{F}, \quad p \text{ paire et } i \text{ impaire et } \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x).$$

2. Analyse

Soit $f \in \mathcal{F}$. Supposons qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x)$.

- (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $p(x)$ et $i(x)$?
- (b) À l'aide des expressions de $f(x)$ et $f(-x)$, montrer que $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$. Dédurre également l'expression de $i(x)$ en fonction de f .

3. Synthèse

- (a) Démontrer la proposition P ci-dessus.
- (b) Pour une fonction $f \in \mathcal{F}$ donnée, la fonction paire p et la fonction impaire i correspondantes sont-elles uniques ?

4. Un exemple

Soit h la fonction définie par : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2 + \sin(x)}$.

Déterminer une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $h = p + i$.