Corrigé du contrôle 1

Exercice : fonctions paires et impaires

On notera $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions réelles, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions définies de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1. **Définitions**
   On dit qu'une fonction réelle f est **paire** si :
   $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = f(-x).$$

   (a) Traduire en langage courant (sans aucun terme mathématique) cette définition.

   Une fonction réelle est paire si tout nombre réel a la même image par cette fonction que son opposé.

   (b) Donner sa négation en langage mathématique.

   Soit $f \in \mathcal{F}$. La fonction f n'est pas une fonction paire si :
   $$\exists x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \neq f(-x).$$

   (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x^3 - x + 1$. Démontrer que g n'est pas une fonction paire.

   Appliquons la définition précédente.
   Posons $x = 2$.
   Alors $g(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$ et $g(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -5$.
   Ainsi $g(2) \neq g(-2)$ et nous avons bien démontré que g n'est pas une fonction paire.

   (d) Donner la définition mathématique d'une fonction **impaire**.

   Soit $f \in \mathcal{F}$. La fonction f est impaire si
   $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = -f(-x).$$

   (e) Démontrer que la seule fonction qui est à la fois paire et impaire est la fonction nulle.

   Soit $f \in \mathcal{F}$ une fonction à la fois paire et impaire. Soit $x \in \mathbf{R}$.
   Comme f est paire, $f(x) = f(-x)$.
   Comme f est impaire, $f(x) = -f(-x)$.

On en déduit que $f(x) = -f(x)$, ou encore $2f(x) = 0$.
On conclut que $f(x) = 0$.
Le nombre x étant quelconque, nous avons montré : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0$.
Donc f est la fonction nulle.

Nous souhaitons dans la suite démontrer que toute fonction réelle peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$P: \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \exists p \in \mathcal{F} \text{ paire}, \quad \exists i \in \mathcal{F} \text{ impaire}, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = p(x) + i(x).$$

2. **Analyse**

   Soit $f \in \mathcal{F}$. Supposons qu'il existe une fonction paire p et une fonction impaire i telles que : $\forall x \in \mathbf{R},\quad f(x) = p(x) + i(x)$.

   (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $p(x)$ et $i(x)$?

   On a par hypothèse pour tout nombre réel y, $f(y) = p(y) + i(y)$. Cela est en particulier vrai pour le nombre réel $-x$, donc $f(-x) = p(-x) + i(-x)$.
   Or p est paire donc $p(-x) = p(x)$, et i est impaire donc $i(-x) = -i(x)$.
   Ainsi $f(-x) = p(x) - i(x)$.

   (b) À l'aide des expressions de $f(x)$ et $f(-x)$, montrer que $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Déduire également l'expression de $i(x)$ en fonction de f.

   On a $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$.
   Sommons ces égalités : $f(x) + f(-x) = 2p(x)$.
   Ainsi $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.
   De même, en soustrayant les deux égalités initiales, on obtient $f(x) - f(-x) = 2i(x)$, donc $i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

3. **Synthèse**

   (a) Démontrer la proposition P ci-dessus.

   Soit $f \in \mathcal{F}$.
   Définissons les fonctions p et i par :

   $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

   Montrons que p est une fonction paire.
   Soit $x \in \mathbf{R}$.
   Alors $p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$.
   Donc p est paire.

   Montrons que i est une fonction impaire.
   Soit $x \in \mathbf{R}$.
   Alors $i(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -i(x)$.
   Donc i est impaire.

Enfin, montrons que $f = p + i$.
Soit $x \in \mathbf{R}$.
Alors $p(x) + i(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$.
Donc $f = p + i$.
Toute fonction peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

(b) Pour une fonction $f \in \mathcal{F}$ donnée, les fonctions p et i correspondantes sont-elles uniques ?

Oui, ces fonctions sont uniques. Il y a deux façons de le démontrer.

On peut reprendre ce qui a été fait dans le travail d'analyse. Soit $f \in \mathcal{F}$. On a démontré qu'il existait une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $f = p + i$. En raisonnant comme nous l'avons fait avec $f(x)$ et $f(-x)$, nous avons démontré que nécessairement les fonctions p et i sont définies par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Il n'y a donc pas d'autres fonctions paire et impaire possibles et elles sont uniques.

On peut faire un raisonnement d'unicité classique indépendant de tout ce qui a déjà été fait. Soit $f \in \mathcal{F}$. Supposons qu'il existe des fonctions paires p_1 et p_2, des fonctions impaires i_1 et i_2 telles que $f = p_1 + i_1 = p_2 + i_2$.
Alors $p_1 - p_2 = i_2 - i_1$.
Or, comme p_1 et p_2 sont des fonctions paires, il est facile de vérifier que $p_1 - p_2$ est également une fonction paire ($\forall x \in \mathbf{R},\ p_1(-x) - p_2(-x) = p_1(x) - p_2(x)$).
De même, i_2 et i_1 étant impaires, on peut montrer que $i_2 - i_1$ l'est également.
Comme $p_1 - p_2 = i_2 - i_1$, on en déduit que $p_1 - p_2$ est une fonction à la fois paire et impaire.
D'après la question 1-e, on en déduit que $p_1 - p_2$ est la fonction nulle. Donc $p_1 = p_2$.
Et par suite, $i_1 = i_2$.
Il y a bien unicité des fonctions paire et impaire de la décomposition de f.

4. **Un exemple**

Soit h la fonction définie par : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad h(x) = \dfrac{1}{2 + \sin(x)}$.
Déterminer une fonction paire p et une fonction impaire i telles que $h = p + i$.

On applique les résultats précédents. Posons pour $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} p(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sin(x)} + \frac{1}{2+\sin(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sin(x)} + \frac{1}{2-\sin(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \sin(x) + 2 + \sin(x)}{(2+\sin(x))(2-\sin(x))} = \frac{2}{4 - \sin^2(x)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sin(x)} - \frac{1}{2+\sin(-x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sin(x)} - \frac{1}{2-\sin(x)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \sin(x) - 2 - \sin(x)}{(2+\sin(x))(2-\sin(x))} = -\frac{\sin(x)}{4 - \sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Alors p est paire, i est impaire, et $h = p + i$:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{1}{2+\sin(x)} = \frac{2}{4-\sin^2(x)} - \frac{\sin(x)}{4-\sin^2(x)}$$