Corrigé du contrôle 1

Exercice 1

1. Définir en langage mathématique les propositions :
   — La fonction exponentielle est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbf{R},\ e^x > 0.$$

   — La fonction exponentielle est croissante.

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}\ x \leqslant y \implies e^x \leqslant e^y.$$

   Nous admettrons que ces deux propositions sont vraies.

2. On considère une fonction réelle f. Définir en langage mathématique la proposition : « La fonction f est bornée sur $\mathbf{R}$. »

$$\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R},\ a \leqslant f(x) \leqslant b.$$

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\quad f(x) = e^{-x^2}$.
   Démontrer, en s'appuyant explicitement sur les propositions ci-dessus, que cette fonction f est bornée sur $\mathbf{R}$.

   Posons $a = 0$ et $b = 1$.
   Soit $x \in \mathbf{R}$.
   On sait que $x^2 \geqslant 0$. Donc $-x^2 \leqslant 0$. Comme la fonction exponentielle est croissante, on en déduit que $e^{-x^2} \leqslant e^0$, donc $e^{-x^2} \leqslant 1$.
   D'autre part, on sait que la fonction exponentielle est strictement positive, donc en particulier, pour $y = -x^2$, nous avons $e^y > 0$. Donc $e^{-x^2} > 0$, et a fortiori $e^{-x^2} \geqslant 0$.
   Nous avons donc bien montré qu'il existait deux nombres $a = 0$ et $b = 1$ tels que pour tout nombre réel x

$$a \leqslant f(x) \leqslant b.$$

   La fonction f est donc bornée sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2

On considère la proposition P :

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \quad z + \frac{1}{z} = 1 \implies z^3 = -1.$$

1. Traduire la proposition P en langage usuel (sans employer le terme z).

   Si la somme d'un nombre complexe non nul et de son inverse vaut 1, alors le cube de ce nombre vaut -1.

2. Donner la négation de P.

$$\neg P : \quad \exists z \in \mathbf{C}^*, \quad z + \frac{1}{z} = 1 \text{ et } z^3 \neq -1.$$

3. Démontrer ou infirmer la proposition P.
   Remarque : aucune connaissance particulière sur les nombres complexes n'est nécessaire et il est inutile de résoudre explicitement les équations proposées.

   Nous allons démontrer que P est vraie.
   Soit $z \in \mathbf{C}^*$.
   Supposons que $z + \frac{1}{z} = 1$.
   On en déduit, en multipliant par z, que $z^2 + 1 = z$. Donc $z^2 = z - 1$.
   Or d'après notre hypothèse, $z - 1 = -\frac{1}{z}$.
   Donc $z^2 = -\frac{1}{z}$.
   Donc $z^3 = -1$.
   Nous avons bien démontré que si $z + \frac{1}{z} = 1$, alors $z^3 = -1$.

4. Donner la réciproque R et la contraposée C de P. Donner également la négation de R.

$$R : \quad \forall z \in \mathbf{C}^*, \quad z^3 = -1 \implies z + \frac{1}{z} = 1.$$

$$C : \quad \forall z \in \mathbf{C}^*, \quad z^3 \neq -1 \implies z + \frac{1}{z} \neq 1.$$

$$\neg R : \quad \exists z \in \mathbf{C}^*, \quad z^3 = -1 \text{ et } z + \frac{1}{z} \neq 1.$$

5. Démontrer ou infirmer C et R.

   La contraposée de P est exactement la proposition P reformulée. Comme P est vraie, C est également vraie.

   Montrons que R est fausse, en démontrant que sa négation est vraie.
   Posons $z = -1$. Alors on a bien $z^3 = -1$, mais $z + \frac{1}{z} = -2 \neq 1$. Ainsi

$$\exists z \in \mathbf{C}^*, \quad z^3 = -1 \text{ et } z + \frac{1}{z} \neq 1$$

   et R est infirmée.