Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h15.
Le barème est donné à titre indicatif : 5 - 3 - 4 - 7.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 On considère la proposition P suivante.

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, \quad n|(a+b) \implies n|a \text{ et } n|b.$$

1. Traduire cette proposition en langage courant (c'est-à-dire en n'utilisant aucun symbole mathématique).
2. Donner la contraposée C et la réciproque R de P.
3. Démontrer ou infirmer P.
4. Démontrer ou infirmer R.

Exercice 2 On note $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.
Démontrer ou infirmer la proposition suivante.

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Remarque : on évitera de faire une étude de fonction, un raisonnement rapide existe.

Exercice 3 On considère la proposition suivante : il existe deux nombres entiers naturels différents tels que leur produit soit égal au double de leur somme.

1. Traduire en langage mathématique cette proposition.
2. Démontrer cette proposition.

Exercice 4 On souhaite démontrer la proposition suivante.
Pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynômiale P_n tel que

$$\forall a \in \mathbf{R}^*, \quad P_n(a + \tfrac{1}{a}) = a^n + \frac{1}{a^n} \qquad (*)$$

(À titre d'exemple, pour $n = 2$, le polynôme $P_2 = X^2 - 2$ convient : pour tout $a \neq 0$, $P_2(a + \frac{1}{a}) = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.)

1. Supposons dans cette question que ces polynômes P_n existent bien.
   Pour $n \geqslant 1$ et $a \neq 0$, calculer
   $$P_1(a + \tfrac{1}{a}) \times P_n(a + \tfrac{1}{a}) - P_{n-1}(a + \tfrac{1}{a}).$$
2. Montrer par récurrence sur n l'existence des polynômes P_n.
3. Pour un entier n fixé, montrer l'unicité du polynôme P_n satisfaisant la condition $(*)$.
   Indication : on rappelle qu'un polynôme non nul a un nombre fini de racines.