Contrôle 1

Calculatrice et documents sont interdits.
Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.
Durée de l'épreuve : 1h15.
Le barême est donné à titre indicatif : 5 - 8 - 6 - 3.
La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$.

1. Traduire en langage mathématiques les deux propositions suivantes.
   – f n'est pas bornée.
   – f est positive en dehors d'un certain intervalle borné de $\mathbf{R}$.
2. Les fonctions définies pour $x \in \mathbf{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$ et $h(x) = \cos(x)$ vérifient-elles ces propositions ? Justifier rigoureusement vos réponses.

Exercice 2

1. On considère la proposition suivante :
$$\forall k \in \mathbf{Z},\ \exists j \in \mathbf{Z},\ k^2 + k = 2j.$$
   (a) Traduire cette proposition en langage courant (c'est-à-dire en n'utilisant aucun symbole mathématique).
   (b) La démontrer.
2. On considère maintenant la proposition P suivante :
$$\forall n \in \mathbf{Z},\quad 8 \text{ ne divise pas } n^2 - 1 \implies n \text{ pair.}$$
   (a) Écrire la réciproque R et la contraposée C de P.
   (b) Démontrer P.
   (c) Démontrer ou infirmer la proposition R.

Exercice 3 **Un théorème de point fixe**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite telle que
– $\forall n \in \mathbf{N},\quad u_n \in \mathbf{N}$;
– $\forall n \in \mathbf{N},\quad u_{n+1} \geq u_n$;
– $\exists N \in \mathbf{N},\quad u_N < N$.
Alors $\exists n \in \mathbf{N},\quad u_n = n$.

1. Démontrer ce théorème.
   Indication : on pourra considérer l'ensemble des entiers n tels que $u_n < n$.
2. À l'aide de trois contre-exemples, montrer que le théorème devient faux dès qu'on supprime l'une des trois hypothèses.

Exercice 4 Démontrer qu'il n'existe pas de rectangle du plan de périmètre 1 et d'aire 1.