Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$.

1. Traduire en langage mathématiques les deux propositions suivantes.
   - f n'est pas bornée :
   $$\forall A \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |f(x)| > A.$$
   (On peut l'obtenir en prenant la négation de la définition d'une fonction bornée : $\exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| \leq A$.)
   - f est positive en dehors d'un certain intervalle borné de $\mathbf{R}$:
   $$\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R} \setminus [a,b], f(x) \geq 0.$$
   Ou encore, avec une implication :
   $$\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x \notin [a,b] \implies f(x) \geq 0.$$
2. Les fonctions définies pour $x \in \mathbf{R}$ par $g(x) = x^2 - 3$ et $h(x) = \cos(x)$ vérifient-elles ces propositions ? Justifier rigoureusement vos réponses.

   La fonction g n'est pas bornée : soit $A \in \mathbf{R}$. Soit $x = \sqrt{|A| + 4}$. Alors $g(x) = |A| + 1 > A$. Ainsi, on a bien montré $\forall A \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, |g(x)| > A$.

   La fonction g vérifie aussi la seconde proposition : soit $a = -\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x \notin [a,b]$, alors $|x| > \sqrt{3}$. Alors $x^2 - 3 \geq 0$. Ainsi, g est bien positive en dehors de l'intervalle $[a,b]$: $\exists a \in \mathbf{R}, \exists b \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x \notin [a,b] \implies g(x) \geq 0$.

   La fonction h est bornée : avec $A = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}, |h(x)| \leq A$. C'est bien la négation de la première proposition.

   La fonction h ne vérifie pas la seconde proposition. Elle prend en effet des valeurs négatives jusqu'à l'infini. Démontrons rigoureusement la négation de la proposition : soient a et b des réels avec $b \geq a$. Montrons que h n'est pas positive partout en dehors de $[a,b]$. Comme $\pi \neq 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n\pi > b$. Alors $n\pi \notin [a,b]$. Or $h(n\pi) = \cos(n\pi) = -1$. On a ainsi montré $\forall a \in \mathbf{R}, \forall b \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} \setminus [a,b], f(x) < 0$.

Exercice 2

1. On considère la proposition suivante :
   $$\forall k \in \mathbf{Z},\ \exists j \in \mathbf{Z},\ k^2 + k = 2j.$$
   (a) Traduire cette proposition en langage courant (c'est-à-dire en n'utilisant aucun symbole mathématique) :
   La somme d'un entier relatif et de son carré est paire.

   (b) La démontrer.

   Soit $k \in \mathbf{Z}$. On a $k^2 + k = k(k+1)$. L'un de ces deux facteurs et pair. En effet, soit k est pair, soit k est impair auquel cas $k+1$ est pair. Or un produit avec un entier pair est pair. Donc $k^2 + k$ est pair.

   Remarque : il est également possible de démontrer ce résultat par récurrence sur k, mais il ne faut pas oublier de traiter le cas des entiers négatifs.

2. On considère maintenant la proposition P suivante :

$$\forall n \in \mathbf{Z},\quad 8 \text{ ne divise pas } n^2-1 \implies n \text{ pair.}$$

   (a) Écrire la réciproque R et la contraposée C de P.
   $R : \forall n \in \mathbf{Z},\quad n \text{ pair} \implies 8 \text{ ne divise pas } n^2-1.$
   $C : \forall n \in \mathbf{Z},\quad n \text{ impair} \implies 8 \text{ divise } n^2-1.$

   (b) Démontrer P.

   Afin de démontrer P, démontrons sa contraposée C.
   Soit $n \in \mathbf{Z}$. Supposons n impair. Montrons alors que $8|n^2-1$.
   Comme n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.
   Alors $n^2-1 = (2k+1)^2-1 = 4k^2+4k = 4(k^2+k)$.
   Or on a démontré que k^2+k était un entier pair. Donc il existe un entier j tel que $k^2+k = 2j$.
   Finalement $n^2-1 = 8j$ et donc $8|n^2-1$.
   On a bien montré que si un entier n est impair, alors $8|n^2-1$. Par contraposée, cela signifie que si 8 ne divise pas n^2-1, alors l'entier n est pair.

   (c) Démontrer ou infirmer la proposition R.

   La proposition R est vraie : soit n un entier relatif pair. Alors on sait que n^2 est aussi pair. Donc n^2-1 est impair. En particulier, n^2-1 n'est pas divisible par 2 et encore moins par 8. La proposition R est donc bien démontrée.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ Un théorème de point fixe

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite telle que

- $\forall n \in \mathbf{N},\quad u_n \in \mathbf{N}$;
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad u_{n+1} \geq u_n$;
- $\exists N \in \mathbf{N},\quad u_N < N$.

Alors $\exists n \in \mathbf{N},\quad u_n = n$.

1. Démontrer ce théorème.
   Indication : on pourra considérer l'ensemble des entiers n tels que $u_n < n$.

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant les trois hypothèses du théorème. Cela signifie en particulier que cette suite est à valeurs entières positives et qu'elle est croissante.
   Soit $E = \{n \in \mathbf{N} \mid u_n < n\}$.
   D'après la troisième hypothèse, l'ensemble E est non vide.
   Comme la suite est à valeurs dans $\mathbf{N}$, l'ensemble E est une partie de $\mathbf{N}$.
   Comme elle est non vide, elle admet un minimum que l'on note n_0.
   Nous allons montrer que $u_{n_0-1} = n_0-1$.
   Comme $n_0 \in E$, $u_{n_0} < n_0$.
   De plus, comme n_0 est le minimum de E, $n_0-1 \notin E$. (Notons que n_0 ne peut pas être nul car $u_0 \geq 0$.)
   Donc $u_{n_0-1} \geq n_0-1$.
   Nous savons aussi que $u_{n_0} \geq u_{n_0-1}$ car la suite est croissante.
   Finalement on a $n_0-1 \leq u_{n_0-1} \leq u_{n_0} < n_0$.
   Ces quatre nombres sont des entiers et n_0-1 et n_0 sont consécutifs.
   On en déduit $u_{n_0} = u_{n_0-1} = n_0-1$. On a bien montré qu'il existait un entier n tel que $u_n = n$.

2. À l'aide de trois contre-exemples, montrer que le théorème devient faux dès qu'on supprime l'une des trois hypothèses.

Il faut trouver des suites qui satisfont deux des trois hypothèses du théorème et qui n'en satisfont pas la conclusion.
Considérons la suite définie par $\forall n \geq 0, u_n = \frac{1}{2}$. Cette suite est constante donc en particulier est croissante et vérifie $u_1 < 1$. Par contre, elle n'est pas à valeurs entières. Et la conclusion du théorème est clairement fausse. Les valeurs de la suite n'étant jamais entières, on a $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \neq n$.

Considérons la suite partout nulle sauf en 0 où $u_0 = 1$. Cette suite est bien à valeurs entières et $u_1 = 0 < 1$. Par contre, elle n'est pas croissante. Et on voit clairement que la conclusion du théorème n'est pas satisfaite : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \neq n$.

Considérons enfin la suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n + 1$. Elle est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et est croissante. Par contre, elle ne vérifie par la troisième hypothèse : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > n$. La conclusion est alors immédiatement insatisfaite.

Exercice 4 Démontrer qu'il n'existe pas de rectangle du plan de périmètre 1 et d'aire 1.

Supposons par l'absurde qu'il existe un rectangle d'aire et de périmètre égaux à 1. Notons $x \in \mathbf{R}_+$ et $y \in \mathbf{R}_+$ la longueur et la largeur du rectangle. On a alors $2x + 2y = 1$ et $xy = 1$. Donc $y = 1/2 - x$ et en injectant dans l'autre équation, on obtient $x(1/2 - x) = 1$. Donc $x^2 - x/2 + 1 = 0$. Donc $(x - 1/4)^2 = -15/16 < 0$. On a abouti à une contradiction.
On en déduit qu'un tel rectangle n'existe pas.

(On aurait aussi pu raisonner sur le discriminant du polynôme de degré 2.)