

CORRIGÉ DU CONTRÔLE 1

Calculatrice et documents sont interdits.

Tous les résultats doivent être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.

Durée de l'épreuve : 1h15.

Le barème est donné à titre indicatif : 4 - 4 - 4,5 - 4,5 - 3.

La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.

Exercice 1 On considère la proposition suivante.

$$P : \quad \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad [x + y < 0 \implies (x < 0 \text{ ou } y < 0)].$$

1. Traduire la proposition P en langage courant (c'est-à-dire en n'utilisant aucun symbole mathématique) :

Si la somme de deux nombres réels est strictement négative, alors l'un des deux nombres est strictement négatif.

Ou encore : pour que la somme de deux nombres réels soit strictement négative, il faut qu'au moins un des deux nombres soit strictement négatif.

2. Donner la réciproque R et la contraposée C de P .

Réciproque : $R : \quad \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad [(x < 0 \text{ ou } y < 0) \implies x + y < 0].$

Contraposée : $C : \quad \forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, \quad [(x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \implies x + y \geq 0].$

3. Démontrons la contraposée C : soient x et y des nombres réels. Supposons $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Alors $x + y \geq 0$. On a donc bien démontré $[(x \geq 0 \text{ et } y \geq 0) \implies x + y \geq 0]$ pour des réels x et y quelconque. La proposition C est donc vraie.

Par contraposée, on en déduit que la proposition P est également vraie.

Démontrons que la réciproque R est fausse. Cela revient à montrer que sa négation est vraie : $\neg R : \quad \exists x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, \quad [(x < 0 \text{ ou } y < 0) \text{ et } x + y \geq 0].$

Soit $x = -1$ et $y = 2$. Alors l'un de ces deux nombres est bien strictement négatif. mais leur somme 1 n'est pas strictement négative. La proposition R est donc fausse.

Exercice 2 Soit f une fonction réelle. On considère la proposition suivante.

$$P : \quad \exists T \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

1. Comment appelle-t-on cette propriété de la fonction f ?

Cette proposition signifie que f est périodique (et une période de f est alors T).

2. Démontrer que si f est la fonction définie pour x dans $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$, alors la proposition P est fausse.

Il faut démontrer la négation de P : $\neg P : \quad \forall T \in \mathbf{R}_+^*, \exists x \in \mathbf{R}, \quad f(x + T) \neq f(x).$

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$. Prenons $x = 0$. Alors $f(x) = 0$ et $f(x + T) = T^2$. Comme $T > 0$, $f(x + T) > 0$. En particulier, on obtient $f(x + T) \neq f(x)$. On a ainsi bien démontré $\neg P$. La proposition P est donc fausse.

3. Soit f la fonction définie pour x dans $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{\pi x}{2}) - 5 \sin(\frac{\pi x}{3})$. Démontrer que P est vraie pour cette fonction f .

Soit $T = 12$. Montrons que pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(x + T) = \cos\left(\frac{\pi(x + 12)}{2}\right) - 5 \sin\left(\frac{\pi(x + 12)}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi x}{2} + 6\pi\right) - 5 \sin\left(\frac{\pi x}{3} + 4\pi\right).$$

Or les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques, donc

$$f(x + T) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 5 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) = f(x).$$

On a ainsi bien démontré la proposition P et la fonction f est 12-périodique.

Remarque : la valeur $T = 12$ a été obtenue grâce à un travail d'analyse au brouillon. On souhaite déterminer la période de f . Pour cela, on sait que l'on va utiliser le caractère périodique des fonctions $\cos$ et $\sin$. On aimerait que $\cos(\frac{\pi(x+T)}{2})$ soit de la forme $\cos(\frac{\pi x}{2} + 2k\pi)$ où k serait un entier. On obtient que T doit être un multiple entier de 4. De même, en considérant le terme $\sin(\frac{\pi x}{3})$, on obtient que T doit être un multiple entier de 6. La valeur $T = 12$ semble donc convenir. Il ne reste qu'à le vérifier : c'est la synthèse. On remarque également que 12 n'est pas la seule solution. Tous els multiples de 12 conviennent.

Exercice 3

1. Énoncer le théorème de Bézout.

Soient a et b deux entiers (naturels ou relatifs) premiers entre eux. Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

On considère la proposition suivante : si un entier naturel est divisible par deux entiers premiers entre eux, alors il est également divisible par leur produit.

2. Traduire cette proposition en langage mathématique :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, [(a|n \text{ et } b|n \text{ et } \text{PGCD}(a, b) = 1) \implies ab|n].$$

3. La démontrer.

Soient a, b et n des entiers naturels tels que a et b divisent n et a et b sont premiers entre eux. Montrons que ab divise alors n .

Il existe des entiers k et l tels que $n = ak$ et $n = bl$. D'autre part, comme a et b sont premiers entre eux, il existe, d'après le théorème de Bézout, des entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

Alors $anu + bnv = n$. Et en remplaçant n par bl ou ak , on obtient $n = ablu + bakv = ab(lu + kv)$.

Comme $lu + kv$ est un entier, on en déduit que ab divise n .

Remarque : d'autres preuves sont possibles. On peut par exemple utiliser le lemme de Gauss : comme $ak = bl = n$, on déduit que b divise ak . Mais comme a et b sont premiers entre eux, cela implique que b divise k . Ainsi ab divise $ak = n$.

4. Est-elle encore vraie si on supprime la condition "premiers entre eux" de l'énoncé ?

Non, elle devient fausse. Donnons un contre-exemple : Soit $n = 12$, $a = 6$ et $b = 4$. Alors a et b divisent bien n , mais leur produit $ab = 24$ ne divise pas n .

Exercice 4

1. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur à 3, $n^2 - 2n - 1 > 0$.

On peut étudier le signe de la fonction proposée après avoir déterminé ses racines. Proposons une méthode plus directe :

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 3$. On a $n^2 - 2n - 1 = (n - 1)^2 - 2$. Comme $n \geq 3$, $n - 1 \geq 2$ et $(n - 1)^2 \geq 4$. Ainsi $(n - 1)^2 - 2 \geq 2$. En particulier, on obtient bien $n^2 - 2n - 1 > 0$. Le résultat est donc démontré pour tout entier supérieur à 3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur à 4, $2^n \geq n^2$.

On effectue une récurrence simple sur n .

Initialisation : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Ainsi $2^4 \geq 4^2$ et la proposition est donc vraie pour $n = 4$.

Hérédité : soit n un entier supérieur à 4. Supposons $2^n \geq n^2$. On a alors $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 =$. Or comme $n \geq 3$, d'après la première question, $2n + 1 < n^2$. Donc $(n + 1)^2 < 2n^2$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit $(n + 1)^2 < 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. On a donc montré $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$ et la propriété est ainsi vraie au rang $n + 1$.

Par récurrence, on a montré que pour tout entier supérieur à 4, $2^n \geq n^2$.

3. Ce résultat est-il encore valable pour $n \leq 3$?

Le résultat est vrai pour $n = 0, 1$ et 2 mais pas pour $n = 3$.

4. Quelle partie de la démonstration n'est plus valable si on démarre la récurrence à $n = 0, 1, 2$, ou 3 ?

Comme le résultat est faux pour $n = 3$, toute preuve par récurrence démarrant en dessous de 3 est nécessairement erronée. Si on démarre la preuve à $n = 0, 1$ ou 2, l'initialisation sera juste. C'est l'hérédité qui sera erronée. Le résultat de la question 1 n'étant valable qu'à partir de $n = 3$, il ne permet pas de passer de $n = 2$ à $n = 3$.

Si on démarre la preuve à $n = 3$, les arguments de l'hérédité sont alors juste. Mais c'est l'initialisation qui est alors fausse.

Exercice 5 Montrer que les racines du polynôme $X^4 + 2X^3 - X^2 + X - 1$ ne peuvent pas être des nombres entiers.

Raisonnons par l'absurde et supposons que ce polynôme possède une racine a dans $\mathbf{Z}$. Alors $a^4 + 2a^3 - a^2 + a - 1 = 0$. Ainsi $a(a^3 + 2a^2 - a + 1) = 1$. On obtient un produit d'entiers égal à 1. Cela implique que les deux facteurs sont égaux à 1 ou -1 . En particulier on obtient $a = 1$ ou $a = -1$. Or 1 et -1 ne sont pas racines du polynôme : $1^4 + 2 \times 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$ et $(-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -4 \neq 0$.

On obtient donc une contradiction et ce polynôme ne peut donc pas avoir de racines entières.