CONTRÔLE 1

*La qualité de la rédaction sera fortement prise en compte dans la notation.
Tous les résultats doivent donc être correctement rédigés et rigoureusement justifiés.*

*Durée de l'épreuve : 45 minutes.
Le barème est donné à titre indicatif.*

Exercice 1 (7 points)

On considère la proposition P suivante (on rappelle que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers).

$$\forall a \in \mathbf{N}^*, \forall b \in \mathbf{N}^*, \forall p \in \mathcal{P}, a + b = p \implies \text{PGCD}(a, b) = 1.$$

1. Traduire cette proposition en langage courant (*i.e.* en n'utilisant aucun symbole mathématique).
2. Donner la négation, la contraposée et la réciproque de P .
3. Démontrer ou infirmer P .

Exercice 2 (3 points)

Soit $a \in \mathbf{N}^*$. Démontrer la proposition suivante.

$$\exists n \in \mathbf{N}, \frac{n - a}{\sqrt{n + 1}} = a.$$

Exercice 3 (4 points)

Traduire en langage mathématique la proposition suivante : l'inverse de tout nombre entier strictement positif peut s'écrire comme la somme des inverses de deux nombres entiers strictement positifs.

Démontrer cette propriété.

Exercice 4 (6 points)

1. Énoncer parfaitement le théorème de la division euclidienne des entiers naturels.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit a un chiffre compris entre 1 et 9. Nous allons montrer qu'il existe un multiple non nul de n dont l'écriture décimale ne contient que les chiffres a et 0.
 - (a) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le reste d'une division euclidienne par n ?

Définissons pour i dans $\mathbf{N}^*$ le nombre m_i dont l'écriture décimale contient i chiffres 1 et rien d'autre : $m_1 = 1, m_2 = 11, m_3 = 111, \dots, m_k = 11 \cdots 11$ (avec k chiffres 1), etc.

- (b) Montrer qu'il existe deux entiers i et j distincts tels que n divise $m_j - m_i$.
- (c) Conclure.