Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (7 points)

On considère la proposition P suivante (on rappelle que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers).

$$\forall a \in \mathbf{N}^*, \forall b \in \mathbf{N}^*, \forall p \in \mathcal{P},\ a+b=p \implies \mathrm{PGCD}(a,b)=1.$$

1. Traduction de P en langage courant : si la somme de deux entiers strictement positifs est un nombre premier, alors ces deux entiers sont premiers entre eux.
2. Négation : $\exists a \in \mathbf{N}^*, \exists b \in \mathbf{N}^*, \exists p \in \mathcal{P},\ a+b=p$ et $\mathrm{PGCD}(a,b) \neq 1$.
   Contraposée : $\forall a \in \mathbf{N}^*, \forall b \in \mathbf{N}^*, \forall p \in \mathcal{P},\ \mathrm{PGCD}(a,b) \neq 1 \implies a+b \neq p$.
   Réciproque : $\forall a \in \mathbf{N}^*, \forall b \in \mathbf{N}^*, \forall p \in \mathcal{P},\ \mathrm{PGCD}(a,b) = 1 \implies a+b=p$.
3. Démontrons la proposition P : soient $a \in \mathbf{N}^*$, $b \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathcal{P}$ tels que $a+b=p$. Montrons que a et b sont premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbf{N}$ un diviseur de a et b. Alors c divise également $a+b$. Donc c divise p. Or p est premier, donc $c=1$ ou $c=p$.
   Cependant, si $c=p$, comme $a \geq c$ et $b \geq c$, on obtiendrait $a+b \geq 2p$ ce qui est impossible puisque $a+b=p$. Donc c vaut nécessairement 1.
   Nous avons ainsi démontré que le seul diviseur commun à a et b est 1 : a et b sont premiers entre eux.
   la proposition P est donc démontrée.

Exercice 2 (3 points)

Soit $a \in \mathbf{N}^*$. Démontrer la proposition suivante.

$$\exists n \in \mathbf{N},\ \frac{n-a}{\sqrt{n+1}} = a.$$

Posons $n = a^2 - 2a$. C'est bien un entier naturel car $a \in \mathbf{N}$. En particulier $n+1 \geq 0$ et $\sqrt{n+1}$ est bien défini.

Alors

$$\frac{n-a}{\sqrt{n+1}} = \frac{a^2+a}{\sqrt{a^2+2a+1}} = a\frac{a+1}{a+1} = a.$$

On a donc bien trouvé un entier n tel que $\frac{n-a}{\sqrt{n+1}} = a$.

Remarque : la valeur de n proposée a été obtenue après un travail d'analyse au brouillon. Le voilà :

$$\frac{n-a}{\sqrt{n+1}} = a \implies n-a = a\sqrt{n+1} \implies n^2 - 2na + a^2 = a^2(n+1) \implies n(n-2a-a^2) = 0.$$

Donc $n=0$ ou $n = 2a + a^2$.

Ce raisonnement ne peut servir de preuve. Il montre juste que si n est une solution du problème, alors n vaut 0 ou a^2+2a. Pour prouver le résultat demandé, il faut vérifier que l'une de ces valeurs convient. Et on remarque d'ailleurs que 0 ne convient pas.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ (4 points)

Traduire en langage mathématique la proposition suivante : l'inverse de tout nombre entier strictement positif peut s'écrire comme la somme des inverses de deux nombres entiers strictement positifs.

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists a \in \mathbf{N}^*, \exists b \in \mathbf{N}^*,\ \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Démontrons cela : soit $n \in \mathbf{N}^*$. Posons $a = b = 2n$. Les nombres a et b sont donc bien des entiers strictement positifs. Alors $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.

La proposition est donc bien démontrée.

Remarque : il y a une autre solution que l'on peut trouver avec un travail d'analyse au brouillon.

On cherche a et b tels que $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Si c'est le cas, alors $a = \frac{bn}{b-n}$. Comme a doit être entier, il faut que $b - n$ divise bn. Le plus simple est de prendre $b = n + 1$ pour avoir $b - n = 1$. Alors $a = bn = n(n+1)$. Et ça marche, on peut ensuite vérifier que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ (6 points)

1. Énoncer parfaitement le théorème de la division euclidienne des entiers naturels.

$$\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}^*, \exists!(n, r) \in \mathbf{N}^2,\ a = nb + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit a un chiffre compris entre 1 et 9. Nous allons montrer qu'il existe un multiple non nul de n dont l'écriture décimale ne contient que les chiffres a et 0.

   (a) Combien y a-t-il de valeurs possibles pour le reste d'une division euclidienne par n ?
   Il y a n valeurs possibles pour r. Il s'agit des entiers de 0 à $n-1$.

   Définissons pour i dans $\mathbf{N}^*$ le nombre m_i dont l'écriture décimale contient i chiffres 1 et rien d'autre : $m_1 = 1, m_2 = 11, m_3 = 111, \ldots, m_k = 11 \cdots 11$ (avec k chiffres 1), etc.

   (b) Pour $i \in \mathbf{N}^*$, notons r_i le reste de la division euclidienne de m_i par n. Comme il y a une infinité de nombres m_i et seulement n restes possibles, d'après le principe des tiroirs, il y a nécessairement au moins deux restes égaux : il existe deux entiers i et j distincts tels que $r_i = r_j$.
   Or nous pouvons écrire les divisions euclidiennes suivantes : $m_i = b_i n + r_i$ et $m_j = b_j n + r_j$ où b_i et b_j sont des entiers positifs. Alors en supposant $j > i$, on obtient $m_j - m_i = (b_j - b_i)n$. Donc $m_j - m_i$ est un multiple de n.

   (c) Il est facile de donner l'écriture décimale de $m_j - m_i$: $m_j - m_i = 111 \cdots 1100 \cdots 000$ avec $j - i$ chiffres 1 suivis de i chiffres 0.
   Le nombre $a(m_j - m_i)$ est clairement un multiple de n et son écriture décimale est $aaa \cdots aa00 \cdots 000$ avec $j - i$ chiffres a et i chiffres 0. Ce nombre répond donc au problème posé.