Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 L'ensemble $\mathbf{N}$ est archimédien :

$$\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}^*, \exists n \in \mathbf{N},\ bn > a.$$

Exercice 2

Montrons que la proposition P_1 est vraie : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $3|n$ et $20|n$. Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 3k$ et il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 20m$. Ainsi $3k = 20m$. Donc 3 divise $20m$. Or 3 est un nombre premier. On en déduit qu'il divise 20 ou qu'il divise m. Comme 3 ne divise pas 20, il divise nécessairement m. Donc il existe $l \in \mathbf{N}$ tel que $m = 3l$. Alors $n = 20m = 20 \times 3l = 60l$. On peut donc conclure que 60 divise n. Nous avons donc bien démontré que si $3|n$ et $20|n$ alors 60 divise n.

Montrons que la proposition P_2 est fausse : soit $n = 30$. Alors $10|n$ et $6|n$. Or 60 ne divise pas n. On a donc trouvé un contre-exemple à la proposition P_2 et celle-ci est donc fausse.

Réciproque de P_1 : $\forall n \in \mathbf{N},\ 60|n \implies (3|n \text{ et } 20|n)$.
Contraposée de P_1 : $\forall n \in \mathbf{N}$, si 60 ne divise pas n alors 3 ne divise pas n ou 20 ne divise pas n.
Négation de P_1 : $\exists n \in \mathbf{N},\ 3|n, 20|n$ et 60 ne divise pas n.

Remarque : la contraposée de P_1 est vraie puisque P_1 est vraie. La négation est fausse pour la même raison. On peut montrer facilement que la réciproque de P_1 est vraie.

Exercice 3

1. Il existe des entiers naturels tels que la différence de leurs carrés est égale à 51.
2. Soit $n = 10$ et $m = 7$. Alors $n^2 - m^2 = 100 - 49 = 51$. Nous avons donc montré l'existence de deux entiers n et m tels que $n^2 - m^2 = 51$.
3. Soit $n = 26$ et $m = 25$. Alors $n^2 - m^2 = (n-m)(n+m) = (26-25)(26+25) = 51$. Nous avons donc trouvé deux autres entiers n et m vérifiant la proposition. Il n'y a donc pas unicité.

Remarque : pour déterminer ces couples (n, m), nous avons effectué un travail d'analyse : soient n et m des entiers naturels tels que $n^2 - m^2 = 51$. Alors $(n-m)(n+m) = 51 = 3 \times 17$. L'égalité entre ces deux produits nous incite à chercher n et m tels que $n+m = 17$ et $n-m = 3$. On trouve alors $n = 10$ et $m = 7$ et il ne reste plus qu'à vérifier qu'il s'agit bien d'une solution à notre problème. Mais on peut également écrire $(n-m)(n+m) = 1 \times 51$ et chercher n et m tels que $n + m = 51$ et $n - m = 1$. On trouve alors $n = 26$ et $m = 25$.
À partir de ces idées, il ne serait pas difficile de démontrer que ces deux couples sont les deux seules solutions du problème.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$

Nous proposons deux démonstrations.
Nous allons montrer que toute suite dans $\mathbf{N}$ est non strictement décroissante, *i.e.* pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ il existe des entiers n et m tels que $n < m$ et $u_n \leq u_m$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{N}$. Posons $A = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des valeurs de la suite. Comme la suite est à valeurs dans $\mathbf{N}$, A est une partie de $\mathbf{N}$. Et comme $u_0 \in A$, c'est une partie non vide. On peut donc affirmer que A possède un minimum. Il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que u_n est le minimum de la partie A. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $m > n$. Comme $u_m \in A$ et u_n est le minimum de A, on a $u_n \leq u_m$. On a donc démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas strictement décroissante. Comme cette suite était quelconque, nous avons démontré la proposition.

Deuxième preuve :
Raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{N}$ strictement décroissante. Montrons par récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq u_0 - n.$$

Pour $n = 0$, on a clairement $u_0 \leq u_0 - 0$. La proposition est donc vraie au rang 0.
Supposons que la propriété est vraie au rang n, *i.e.* $u_n \leq u_0 - n$. Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.
Comme la suite est strictement décroissante, $u_{n+1} < u_n$. Comme elle est à valeurs entières, on en déduit $u_{n+1} \leq u_n - 1$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_0 - n$. Donc $u_{n+1} \leq u_0 - n - 1 = u_0 - (n + 1)$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
Nous avons ainsi démontré la proposition ci-dessus par récurrence.
Soit maintenant $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > u_0$. Alors $u_0 - n$ est un nombre strictement négatif. Comme $u_n \leq u_0 - n$, u_n est également un nombre négatif. Or $u_n \in \mathbf{N}$. On obtient donc une contradiction.
On en déduit que notre hypothèse était absurde et qu'il n'existe pas de suite à valeurs dans $\mathbf{N}$ strictement décroissante.