 UNE STRATÉGIE BASÉE SUR LES PERMUTATIONS

Ce devoir est facultatif. Il est à faire par groupes de deux étudiants au plus et est à rendre pour le 16 décembre au plus tard.

Le problème est le suivant : on considère une équipe de 100 joueurs numérotés de 1 à 100 et 100 boîtes également numérotées. Tous les nombres de 1 à 100 ont été répartis aléatoirement dans les boîtes (un nombre par boîte). Chacun à leur tour, les joueurs auront le droit d'ouvrir 50 boîtes. Ils n'auront ensuite aucun moyen de communiquer avec les autres joueurs. Le but est que chaque joueur retrouve son propre numéro dans l'une des boîtes qu'il a ouverte. Si un joueur échoue, ils ont tous perdu.

Notre objectif est de déterminer une stratégie pour le choix des boîtes qui optimise leurs chances de gagner.

1. Méthode naïve

Chaque joueur choisit aléatoirement les 50 boîtes qu'il va ouvrir.

1. Quelle est la probabilité pour un joueur de retrouver son numéro ?
2. Quelle est la probabilité que les joueurs gagnent ?
3. En quoi cette méthode est-elle clairement mauvaise ? Comment peut-on l'améliorer simplement ?

On pourra raisonner sur des cas plus simples (avec 2, 4 ou 6 boîtes par exemple).

2. Permutations et cycles

On peut représenter la répartition des numéros dans les boîtes par une permutation σ de $\mathfrak{S}_{100}$. Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 99 & 100 \\ 12 & 59 & \cdots & 86 & 34 \end{pmatrix},$$

cela signifie que le numéro 12 est dans la première boîte, le numéro 59 est dans la deuxième, etc.

On appelle cycle de taille k une permutation σ de la forme

$$a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} a_3 \xrightarrow{\sigma} \cdots \xrightarrow{\sigma} a_k \xrightarrow{\sigma} a_1,$$

où les a_i sont des nombres entiers distincts. Par exemple, la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est le cycle $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ de longueur 3.

Pour une permutation σ quelconque, on parle des cycles contenus dans σ . Par exemple, la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ contient 3 cycles : le cycle $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ de longueur 2, le cycle $2 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ de longueur 4 et le cycle $4 \rightarrow 4$ de longueur 1.

1. Rappeler le nombre total de permutations possibles.
2. Soient $a_1, \dots, a_k$ des nombres entiers distincts. Combien y a-t-il de cycles de longueur k contenant tous ces nombres a_i ?
3. Soit $k \geq 51$. Montrer que le nombre de permutations contenant un cycle de longueur k est $\binom{100}{k}(k-1)!(100-k)!$ puis simplifier cette expression.

3. Nouvelle stratégie

On note σ la permutation associée à la répartition des nombres dans les boîtes. Chaque joueur va parcourir le cycle de la permutation σ qui démarre à la boîte correspondant à son numéro. Par exemple le joueur 5 va commencer par ouvrir la boîte numéro 5. Si celle-ci contient le numéro 34, il va ensuite ouvrir la boîte 34. Si cette dernière contient le numéro 12, il continue avec la boîte 12, etc. Il continue ainsi jusqu'à ce qu'il ait retrouvé son numéro 5 ou qu'il ait ouvert 50 boîtes.

1. Soit $p \leq 100$. Justifier que le joueur p retrouve son numéro si et seulement si p est dans un cycle de σ de longueur inférieure à 50.
2. En déduire sous quelle condition les joueurs vont perdre avec cette stratégie.
3. Calculer ainsi leur probabilité de perdre le jeu et en déduire leur probabilité de gagner.
4. évaluer numériquement cette probabilité et la comparer à celle obtenue avec la méthode naïve.
5. Essayer d'expliquer pourquoi cette stratégie est aussi bonne.