Multiplication par 2

Ce devoir est facultatif. Il est à faire par groupes de deux étudiants au plus et est à rendre pour le 5 décembre au plus tard.

L'objectif de ce devoir est d'expliquer certaines propriétés présentées dans la vidéo de Micmath disponible à l'adresse suivante.
https ://www.youtube.com/watch ?v=-X49VQgi86E

Nous ne considérerons que la table de multiplication par 2 (les résultats se généralisent facilement pour des nombres plus élevés). Pour tout entier n, nous appellerons figure de la multiplication par 2 modulo n, la figure obtenue en positionnant les entiers de 0 à $n-1$ sur le cercle unité et en reliant chaque entier à son double modulo n.

1 Boucles de la figure

Nous nous intéressons ici à une propriété en partie évoquée à la fin de la vidéo. On montre que certaines figures ne sont constituées que de segments reliant deux points « dans les deux sens » ; cela arrive lorsque le multiplicateur k satisfait $k^2 = 1 \mod n$. Dans le langage des groupes, on dirait que k est d'ordre 2 dans le groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Nous allons étendre cette propriété et nous intéresser aux nombres de boucles obtenues sur la figure. On appellera boucle un chemin constitué de segments successifs revenant à son point de départ. Par exemple, pour la multiplication par 2 modulo 15, la suite de segments $2 \mapsto 4 \mapsto 8 \mapsto 1 \mapsto 2$ constitue une boucle. Dans le cas évoqué dans la vidéo, on observe des boucles « aller-retour »constituées de deux fois un même segment.

1. Considérer plusieurs nombres premiers p et représenter la figure de la multiplication par 2 modulo p.
2. Pour chacune, comparer le nombre de boucles observées et l'ordre de 2 dans le groupe $((\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*, \times)$. Proposer une conjecture.
3. Démontrer cette conjecture. *Indication : connaissant l'ordre de 2, on peut montrer que toutes les boucles sont constituées d'un même nombre de segments.*
4. Montrer que le résultat reste partiellement valable pour un entier n quelconque si 2 est inversible dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (en considérant alors l'ordre de 2 dans le groupe des éléments inversibles).
5. Que peut-on observer si 2 n'est pas inversible modulo n ? (Proposer des exemples.)

2 Illusion d'optique

On s'intéresse maintenant au phénomène observé lorsqu'on augmente la valeur de n. Une courbe étrange semble apparaître. Elle ressemble à une courbe bien connue : la cardioïde. Nous allons démontrer que c'est bien le cas et qu'elle apparaît de la manière suivante : les segments tracés sont tous tangents à la cardioïde. C'est cette propriété qui est à la base de l'illusion optique observée.

1. Écriture analytique du problème

   On considère maintenant que le cercle de la figure est le cercle unité du plan complexe. Le nombre 0 sera situé en 1 et les nombres de 1 à $n-1$ seront disposés régulièrement sur le cercle dans le sens trigonométrique.

   (a) Soit $k \in \{1, \dots n-1\}$. Quelle est l'affixe de la position du nombre k ?

   (b) Quelle est l'affixe de la position du nombre $2k \mod n$?

   (c) Si on fait varier n, un même point du cercle peut être l'affixe d'un nombre k modulo n et d'un nombre k' modulo n'. Montrer que le point auquel il sera relié est le même, que l'on raisonne avec n ou n'.

   (d) En déduire qu'on peut en un certain sens faire tendre n vers $+\infty$ et obtenir une figure où chaque point $e^{i\theta}$ est relié à un point du cercle que l'on précisera.

   La cardioïde recherchée est un ensemble que l'on peut paramétrer de la façon suivante :

   $$\mathcal{C} = \{(a\cos(\theta)(1+\cos(\theta)) + b, a\sin(\theta)(1+\cos(\theta)) + c); \theta \in [0, 2\pi]\},$$

   où a, b et c sont des nombres réels que nous préciserons. Pour chaque valeur du paramètre θ, nous noterons M_θ le point de $\mathcal{C}$ correspondant. Et nous noterons A_θ le point du cercle unité de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$.

   Lorsqu'une courbe est paramétrée sous la forme $(x(\theta), y(\theta))$, θ variant dans $\mathbf{R}$, le vecteur $(x'(\theta), y'(\theta))$ est un vecteur tangent à la courbe au point $(x(\theta), y(\theta))$ considéré.

2. Détermination des paramètres de la cardioïde.

   On suppose ici que la figure recherchée est bien une cardioïde. Nous en cherchons alors les paramètres.

   (a) Choisir arbitrairement des valeurs pour a, b et c. Pour $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, etc, représenter sur une figure le point de $\mathcal{C}$ correspondant.

   (b) Quelle doit être la valeur de c pour la cardioïde recherchée ?

   (c) Déterminer en fonction de a et b le sommet de la cardioïde. Il s'agit d'un point pour lequel le vecteur tangent est horizontal.

   (d) Pour quelle valeur de θ le segment $[A_\theta A_{2\theta}]$ est-il horizontal ?

   (e) En déduire la valeur de a. Déterminer enfin la valeur de b.

   (f) Réaliser sur la dernière page la figure de la multiplication par 2 modulo 37 et placer dessus les points de la cardioïde correspondant à $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$, etc.

3. Démonstration du résultat.

   Nous démontrons ici que les segments tracés sont tous tangents à la cardioïde déterminée dans la partie précédente.
   Soit $\theta \in \mathbf{R}$.

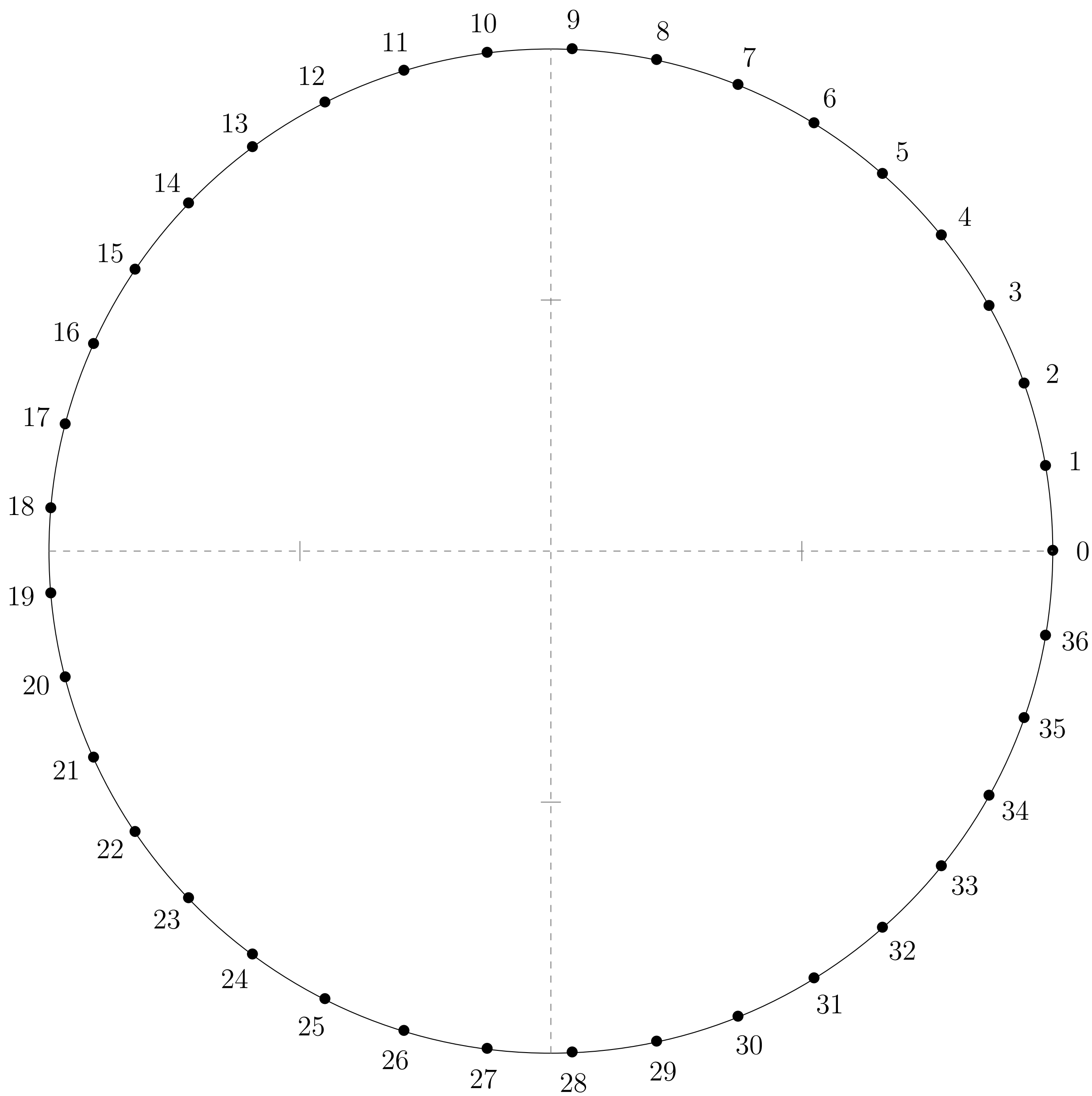
   (a) Montrer que les points A_θ, M_θ et $A_{2\theta}$ sont alignés.

   (b) Montrer $\frac{\sin(2\theta)-\sin(\theta)}{\cos(2\theta)-\cos(\theta)} = -\frac{\cos(2\theta)+\cos(\theta)}{\sin(2\theta)+\sin(\theta)}$.

   (c) Montrer que la pente de la droite $(A_\theta A_{2\theta})$ est égale à la pente du vecteur tangent à la cardioïde en M_θ.

   (d) En déduire que le segment $[A_\theta A_{2\theta}]$ est tangent à la cardioïde au point M_θ.

Remarque : la cardioïde est une courbe apparaissant naturellement dans un bon nombre de phénomènes. Le joli site mathcurve les recense :
http ://www.mathcurve.com/courbes2d/cardioid/cardioid.shtml
Parmi ces propriétés, on remarque que la cardioïde est une épicycloïde : on peut l'obtenir en faisant rouler un cercle de rayon $1/2$ *à l'extérieur d'un cercle de rayon 1 et en observant la trajectoire d'un point du petit cercle. Les figures observées dans la vidéo sont obtenues en ne considérant plus seulement la multiplication par 2 mais les multiplications par des entiers* k *de plus en plus grands. On reconnaît (au moins pour des petites valeurs de* k*) l'épicycloïde obtenue en faisant rouler le cercle de rayon* $1/k$ *à l'extérieur d'un cercle de rayon 1. La propriété étudiée ici semble donc se généraliser.*


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36