Coloriage de carte

Ce devoir est facultatif. Il est à faire par groupes de deux étudiants au plus et est à rendre pour le 5 décembre au plus tard.

On considère une carte géographique. On souhaite colorier les différents pays de la carte de manière à ce que deux pays voisins aient toujours des couleurs différentes. Le problème que nous allons étudier est le suivant : de combien de crayons de couleur doit-on disposer pour qu'un tel coloriage soit possible ?

Avant d'énoncer un théorème, précisons notre cadre d'étude. On appellera *pays* une partie du plan connexe (c'est-à-dire en un seul morceau) délimitée par une courbe fermée de longueur finie appelée *frontière*. On appelle *carte* un ensemble fini de pays deux à deux disjoints (en ne considérant pas les frontières). On dit que deux pays sont *voisins* si une partie infinie de leurs frontières est commune (si par exemple deux pays ne se touchent qu'en un seul point, ils ne sont pas voisins). Enfin, *colorier* une carte signifie associer à chaque pays une couleur. Nous dirons qu'une carte est coloriée *correctement* si elle est coloriée de manière à ce que deux pays voisins aient toujours des couleurs différentes. Nous pouvons désormais énoncer le théorème suivant.

Théorème des quatre couleurs
Quatre couleurs différentes suffisent à colorier correctement toute carte du plan

Ce théorème est extrêmement difficile à démontrer. La preuve existante nécessite de traiter plus de 1000 cas particuliers. Il a fallu l'aide d'un ordinateur pour réussir cela.

Il y a néanmoins une partie de la preuve qui est très simple :

1. Justifier qu'une, deux ou trois couleurs ne peuvent suffire à colorier correctement toute carte du plan.

1 Une démonstration

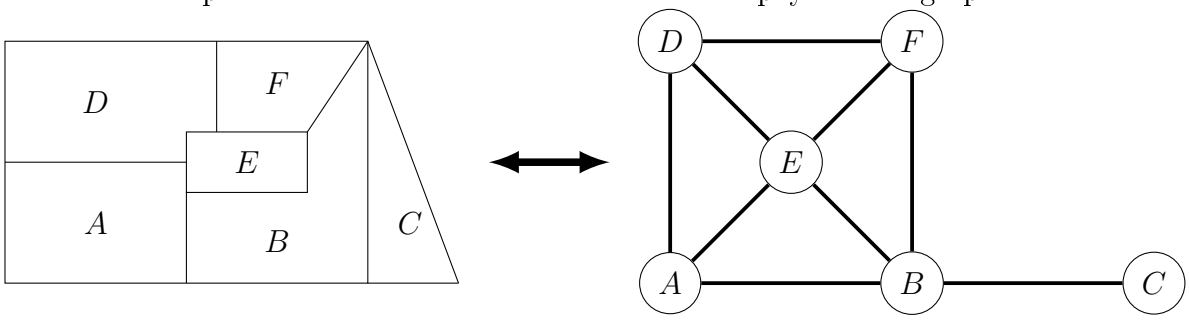
Le théorème des quatre couleurs étant bien trop difficile, nous allons nous contenter d'en démontrer une version plus faible :

Théorème
Cinq couleurs différentes suffisent à colorier correctement toute carte du plan.

Sa démonstration donne une petite idée des arguments utilisés dans la preuve du théorème des quatre couleurs et elle a un mérite : il n'y aura que trois cas particuliers à traiter pour en venir à bout !

Mais avant cela, il faudra définir le graphe associé à une carte et en démontrer une propriété importante.

- **Graphe associé à une carte**
  Pour simplifier les raisonnements, nous allons schématiser les cartes que nous considérons. Un *graphe* est un ensemble de sommets reliés (ou non) par des arêtes. Il est facile d'associer à une carte un graphe la représentant. Pour chaque pays de la carte, on définit un sommet. Si deux pays sont voisins, on relie les deux sommets correspondants par des arêtes. L'exemple ci-dessous montre une carte avec six pays et son graphe associé.



2. Le graphe associé à une carte dans le plan n'est pas un graphe tout à fait quelconque. Faire des recherches et proposer des définitions des notions suivantes : graphe planaire, graphe connexe. On pourra illustrer ces définitions en représentant des exemples et des contre-exemples de tels graphes.

Notre problème consiste désormais à attribuer à chaque sommet d'un graphe une couleur de telle sorte que deux sommets liés par une arête n'aient jamais la même couleur.

- **Formule d'Euler**
  On considère un graphe planaire $\mathcal{G}$. Notons S le nombre de ses sommets, A le nombre de ses arêtes, F le nombre de faces délimitées par le graphe.
  Dans notre exemple ci-dessus, on a $S = 6$, $A = 9$ et $F = 4$.

Théorème. *Si $\mathcal{G}$ est un graphe planaire connexe, alors*

$$S - A + F = 1.$$

3. Démontrer cette formule, appelée formule d'Euler. On raisonnera par récurrence sur le nombre d'arêtes. L'idée est de considérer un graphe à n arêtes et de lui en retirer une afin d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Noter qu'il y a plusieurs cas à traiter : une arête peut être bordée par 0, 1 ou 2 faces intérieures au graphe.

- **Un lemme**
  Soit $\mathcal{G}$ un graphe planaire non vide. Il existe un sommet de $\mathcal{G}$ ayant au plus cinq sommets voisins dans $\mathcal{G}$.

4. Démontrer ce lemme. On supposera par l'absurde que chaque sommet du graphe a au moins 6 voisins. On montrera que $A \geq 3S$ et $F \leq \frac{2A}{3}$ et on obtiendra une contradiction avec la formule d'Euler.

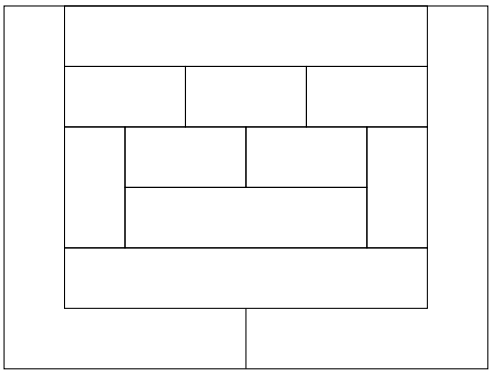
- **Démonstration du théorème**
  Il est désormais possible de démontrer le théorème annoncé. Voici le plan de la démonstration.
  - On raisonne sur les graphes associés aux cartes. Si un graphe n'est pas connexe, on peut raisonner sur chacune de ses parties connexes puisque les coloriages de ces différentes parties sont indépendants.
  - On raisonne par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.
  - On sait qu'il existe un sommet s ayant au plus cinq voisins. On enlève ce sommet au graphe et on applique l'hypothèse de récurrence pour colorier correctement le reste du graphe.
  - On remet ensuite le sommet s manquant et on distingue plusieurs cas.
  - S'il a au plus quatre voisins, il est facile de le colorier.
  - S'il a cinq voisins, mais que ceux-ci ont été coloriés avec moins de quatre couleurs, il est facile de colorier s.
  - Enfin, si les cinq voisins ont été coloriés avec les cinq couleurs, il va falloir modifier le coloriage déjà effectué.
    . On considère les cinq voisins en question et on en choisit deux non reliés par une arête. Notons leurs couleurs R et V. L'idée est de changer R en V afin de pouvoir utiliser R pour le sommet s.
    . Si le sommet colorié en R a dans le reste du graphe un ou plusieurs voisin V, on modifiera tous ces V en R. Mais si ces sommets V avaient également d'autres voisins R, on modifiera alors tous ces R en V. Et ainsi de suite.
    . Finalement on regarde, en partant du sommet initial R, la chaîne de tous les sommets voisins alternant les couleurs R et V, et on échange toutes ces couleurs.
    . Si tout va bien, on aura toujours un graphe bien colorié et on pourra colorier notre sommet s en R. Il est cependant possible que cela ne marche pas : si la chaîne des V et R aboutit sur le sommet de couleur V voisin de s. Dans ce cas, cette couleur V devra aussi être changée en R. On aura finalement échangé les V et les R pour retrouver un V et un R près de s.
    . Si c'est le cas, on peut montrer qu'il existe nécessairement un autre choix de deux sommets voisins de s pour lesquelles la méthode ci-dessus fonctionnera.

5. Rédiger correctement cette démonstration. On pourra expliquer simplement les différents cas en les illustrant par des figures.

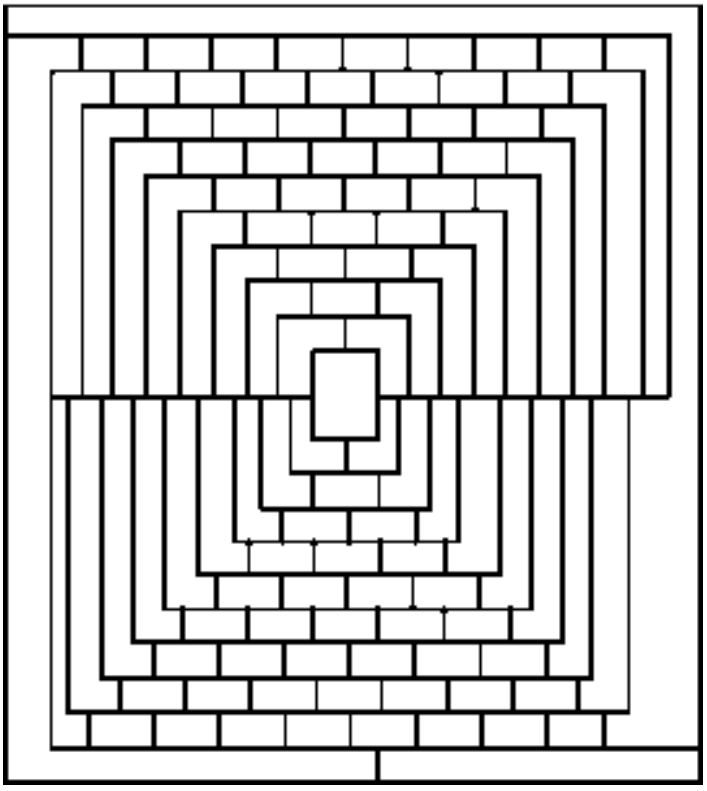
2 Un exemple

6. Le but de cette partie est d'illustrer sur un exemple les étapes de la démonstration précédente. Colorier la carte suivante avec cinq couleurs étant trop facile, il s'agira de la colorier avec seulement quatre couleurs. (On peut essayer de la colorier sans méthode pour réaliser que le problème n'est pas forcément simple.)

On décomposera bien la méthode employée pour y arriver et on tâchera de faire apparaître les cas étudiés dans la preuve.



Ceux qui aiment le coloriage pourront essayer de colorier la carte suivante avec quatre couleurs. Elle a été proposée par Martin Gardner, célèbre spécialiste des jeux mathématiques, qui prétendit malicieusement que cinq couleurs étaient nécessaires pour la colorier.



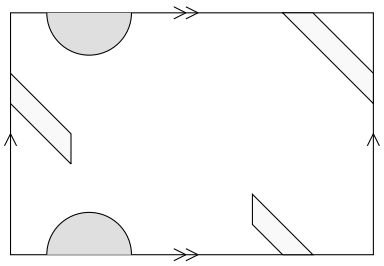
3 Carte sur une sphère

On considère maintenant des cartes dessinées sur une sphère.

7. Établir un théorème analogue au théorème des quatre couleurs. Pour le démontrer, il suffit de trouver un moyen de se ramener à une carte dans un plan et d'appliquer alors le théorème des quatre couleurs.

4 Carte sur un tore

On considère enfin des cartes dessinées sur une bouée, appelée tore en mathématiques.

8. Conjecturer un théorème analogue au théorème des quatre couleurs. Exhiber un exemple nécessitant le plus grand nombre de couleurs possible pour son coloriage.

Pour représenter un tore, on peut considérer qu'il s'agit d'un rectangle dont on identifie les côtés opposés. En effet, si on rassemble deux côtés opposés d'un rectangle, on obtient un cylindre. Et si on rassemble ensuite les deux autres côtés opposés, on obtient bien un tore.