

L'objectif de ce document est d'aider les étudiants à aborder les premiers exercices de TD en donnant des exemples analogues détaillés.

On analyse les énoncés, on propose des raisonnements appropriés (en bleu) puis on rédige des démonstrations (en rouge).

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inégalité : $\frac{\sqrt{x}}{x-4} \leq 1$.

Pour résoudre l'inégalité, il faut la manipuler algébriquement. Deux éléments à traiter : la fraction et la racine carrée ; en n'oubliant pas les contraintes sur x liées à ces éléments : x doit être différent de 4 pour que le dénominateur soit non nul, et x doit être positif pour que sa racine carrée soit bien définie.

Rappelons les règles régissant inégalité et produit : si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $ac \leq bc$. Si $c < 0$, l'inégalité devient $ac \geq bc$. Le nombre c sera ici $x - 4$ dont nous ne connaissons pas le signe a priori. Il nous faut distinguer deux cas.

Nous nous débarrasserons de la racine carrée en élevant au carré à l'aide de la règle suivante : si $a = b$, alors $a^2 = b^2$. La réciproque n'est vraie que si a et b sont de même signe. Pourquoi se débarrasser de la racine carrée ? La raison est que tout ce que nous savons sur $\sqrt{x}$, c'est qu'il s'agit du nombre positif qui élevé au carré est égal à x : l'unique information tangible nécessite d'élever au carré. C'est a priori la seule façon d'avancer dans la résolution.

Enfin, une remarque sur le raisonnement : en manipulant l'inégalité, nous raisonnons sur une solution a priori x du problème. La manipulation de racine carrée ne fournit pas d'égalités équivalentes (il faut faire attention aux signes). Si on ne fait pas attention aux contraintes imposées par la racine carrée, on risque de trouver des fausses solutions. Il est recommandé de vérifier que les solutions obtenues le sont bien !

Soit $x \in \mathbf{R}$. Supposons que x satisfait l'inégalité : $\frac{\sqrt{x}}{x-4} \leq 1$.

Pour qu'elle soit définie, il est nécessaire que $x \neq 4$.

Distinguons alors deux cas :

- si $x > 4$, alors en multipliant les deux membres par $x - 4$ (qui est positif), nous obtenons : $\sqrt{x} \leq x - 4$. De même, pour que $\sqrt{x}$ soit bien défini, il faut que $x \geq 0$.

Élevons au carré les deux membres : $x \leq (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$.

Passons tous les termes à droite : $0 \leq x^2 - 9x + 16$.

Nous reconnaissons un polynôme de degré 2. Nous savons qu'il est positif en dehors de ses racines.

Son discriminant est : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 16 = 17$. Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \quad x_2 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}.$$

Donc $x^2 - 9x + 16$ est positif pour $x \in]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.

Rappelons que nous avons des conditions : $x \geq 0$ et $x > 4$.

Comme $x_1 < 4$ et $x_2 > 4$, l'ensemble des solutions obtenues dans ce premier cas est l'intervalle $[x_2, +\infty[$.

- si $x < 4$, alors en multipliant les deux membres par $x - 4$ (qui est négatif), nous obtenons : $\sqrt{x} \geq x - 4$. Toujours pour que $\sqrt{x}$ soit bien défini, il faut que $x \geq 0$.

Dans ce cas, nous savons que $\sqrt{x} \geq 0$.

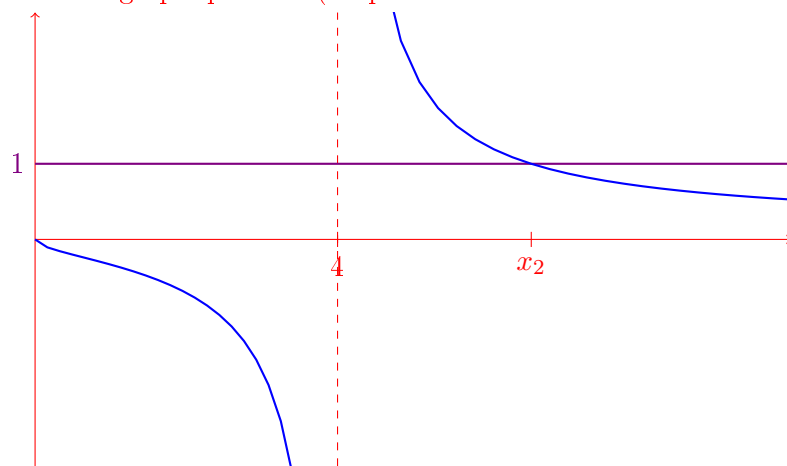
Comme $x - 4 \leq 0$, nous déduisons que l'inégalité $\sqrt{x} \geq x - 4$ est toujours satisfaite.

Ainsi, dans ce cas, nous obtenons que l'ensemble des solutions est l'intervalle $[0, 4[$.

Conclusion : nous avons obtenu l'ensemble des solutions suivant :

$$[0, 4[\cup [x_2, +\infty[$$

Vérifions graphiquement (on peut étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-4}$) :



Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs la proposition suivante puis donner sa négation :

" La fonction f s'annule."

Reformulons la proposition : "le graphe de f passe par 0" ou encore "la fonction f prend la valeur 0", "la fonction f possède une racine". Nous ne savons rien de cette racine, on sait juste qu'il en existe une. Cet énoncé est un énoncé d'existence : il existe une abscisse pour laquelle la valeur de f est nulle. La réponse est donc :

$$\exists x \in \mathbf{R}, f(x) = 0.$$

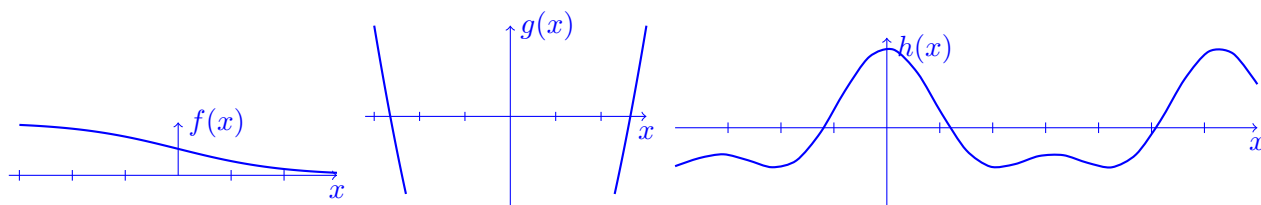
La négation de cette proposition est simple en français : "la fonction f ne s'annule pas." Disons-le autrement : "il n'existe aucun point x pour lequel $f(x) = 0$ ", autrement dit "pour tout x , $f(x) \neq 0$ ". En passant à la négation, le $\exists$ devient un $\forall$ et ce qu'affirme la proposition est nié. La négation est donc finalement :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0.$$

On considère les 3 fonctions suivantes. Lesquelles vérifient la propriété ?

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}, \quad g(x) = x^2 - 7, \quad h(x) = \cos(x) + \frac{1}{2} \cos(2x).$$

Pour chacune de ces fonctions, on cherche à savoir si elle s'annule sur $\mathbf{R}$ ou pas. La première chose que nous pouvons faire pour y répondre est de représenter leur graphe :



Il semble que f ne s'annule pas et il est évident que g et h s'annulent sur $\mathbf{R}$ (plusieurs fois même). Mais cela ne peut pas faire office de démonstration. Il s'agit maintenant de trouver les arguments mathématiques permettant de justifier les résultats.

Commençons par la fonction f . Il semble qu'elle ne s'annule pas car elle reste strictement positive. Nous souhaitons démontrer que la proposition est fausse. Nous voulons en fait démontrer que sa négation est vraie : $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0$. Cela sera réussi si nous justifions bien que f est strictement positive. Comme il s'agit d'une proposition du type $\forall x$, il faut se donner un élément x quelconque puis vérifier que pour ce x , $f(x) \neq 0$. Nous pourrions faire une étude de fonction mais cela semble inutile ici. Une simple connaissance des fonctions usuelles suffit. Voilà la preuve (notez bien la façon de rédiger !).

Soit $x \in \mathbf{R}$.

D'après les propriétés de la fonction exponentielle, on peut affirmer $e^x > 0$.

Donc $e^x + 1 > 0$.

Le passage à l'inverse conserve le signe, donc $\frac{1}{e^x + 1} > 0$.

Finalement nous avons montré que $f(x) > 0$. En particulier $f(x) \neq 0$.

Comme x est un nombre réel quelconque nous avons bien démontré que $\forall x \in \mathbf{R} f(x) \neq 0$.

La proposition est donc fausse pour cette fonction f .

Passons à la fonction g . Nous voyons bien graphiquement que g s'annule. Et comme g est une fonction polynomiale de degré 2, il semble facile de déterminer ses racines. Cherchons-les au brouillon.

Remarquons qu'on peut se passer d'un calcul de discriminant ici, les racines sont évidentes : $x^2 - 7 = 0$ si et seulement si $x^2 = 7$ ssi $x = \pm\sqrt{7}$.

(Ou encore en reconnaissant une expression du type $A^2 - B^2 : x^2 - 7 = 0$ ssi $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$ ssi $x - \sqrt{7} = 0$ ou $x + \sqrt{7} = 0$ ssi $x = \pm\sqrt{7}$.)

Nous pouvons maintenant rédiger la démonstration de la proposition pour g . Il s'agit juste de montrer que g s'annule au moins une fois. Exhiber l'une de ses racines suffit !

Soit $x = \sqrt{7}$.

Alors $g(x) = \sqrt{7}^2 - 7 = 0$.

Donc g s'annule en $x = \sqrt{7}$. La proposition est bien vraie pour g :

$$\exists x \in \mathbf{R}, g(x) = 0.$$

Terminons avec h . Là aussi, il semble graphiquement clair que h s'annule plusieurs fois. Mais déterminer explicitement ses racines semble difficile (vous pouvez essayer de résoudre l'équation $\cos x + \frac{1}{2} \cos(2x) = 0$). Il n'est pas nécessaire de trouver les racines de h , il faut juste démontrer qu'il en existe. Graphiquement, on devine l'argument à invoquer. On voit qu'il y a une racine entre 1 et 2 car avant 1 la fonction est positive et après 2 elle est négative. Entre les deux, il faut bien qu'elle passe par 0. On reconnaît le théorème des valeurs intermédiaires. N'oublions pas qu'il y a un argument essentiel dans ce raisonnement : la fonction h est continue ! C'est cela qui assure le passage obligé par 0.

Pour mener à bien la preuve, on peut faire une étude de fonction et déterminer les intervalles de monotonie de h . Le TVI ne nécessite pas d'en faire autant. Il suffit de bien préciser ce que nous avons dit ci-dessus en montrant que h prend des valeurs positives et négatives. Pour nous épargner des calculs difficiles, choisissons judicieusement des abscisses pour lesquelles on connaît explicitement les valeurs de h : 0, $\frac{\pi}{2}$, π sont de bons candidats, 1 et 2 sont moins bien.

Calculons deux valeurs de h : $h(0) = \cos(0) + \frac{1}{2} \cos(2 \times 0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$. Et

$h(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \cos(\pi) = 0 - \frac{1}{2} < 0$.

Donc h est positive en 0 et négative en $\frac{\pi}{2}$.

De plus, on sait que la fonction cosinus est continue sur $\mathbf{R}$. La fonction h étant une combinaison de cosinus, elle est également continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer que $h(x)$ prend toutes les valeurs possibles entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

En particulier, h prend la valeur 0 sur cet intervalle :

$$\exists x \in [0, \frac{\pi}{2}], h(x) = 0.$$

Cela implique que la proposition est vraie pour h .

Exercice 4

Traduire en langage mathématique la proposition suivante. Est-elle vraie ou fausse ?

Une somme de deux entiers est paire si et seulement si les deux entiers sont pairs.

Une équivalence est une double implication. Elle établit un lien entre les deux propositions : "la somme est paire" et "les deux entiers sont pairs". Chaque implication prétend que la validité d'une des deux dépend de la validité de l'autre. Il s'agit donc d'implications. Noter bien que dans un premier temps, on ne s'intéresse pas à la validité de la proposition globale, on cherche juste à bien la comprendre. Et il faut bien reconnaître que trouver le bon sens de ces implications oblige à se prendre un peu la tête pour être sûr de ne pas se tromper.

Proposons des reformulations de la proposition 1 : "le fait que la somme soit paire nécessite que les deux entiers soient pairs" ou encore "si la somme est paire, alors forcément les deux entiers sont pairs". Autrement dit, on ne peut pas imaginer une somme paire sans que les deux entiers le soient : un résultat pair implique que les entiers l'étaient. Le sens est donc le suivant :

somme paire $\implies$ entiers pairs.

Il reste à bien écrire mathématiquement l'ensemble. Donnons un nom aux deux entiers n et m . Être pair signifie par définition être divisible par 2. La somme paire se traduit donc par $2|n + m$.

Enfin, donnons un statut à n et m . La propriété se veut parfaitement générale, vraie pour tous les entiers n et m . La traduction est donc :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall m \in \mathbf{Z}, \quad 2|n + m \implies 2|n \text{ et } 2|m.$$

Passons à la seconde proposition. On peut imaginer qu'il s'agit de l'implication inverse, c'est-à-dire la réciproque. Essayons de nous en convaincre. Reformulons simplement : "la somme sera bien paire si les deux entiers le sont" et dans le bon sens "si les deux entiers sont pairs, alors on est sûr que la somme le sera". C'est bien la réciproque. Pour le reste tout est pareil, la propriété étant tout aussi générale que la première.

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall m \in \mathbf{Z}, \quad 2|n \text{ et } 2|m \implies 2|n + m.$$

Regardons maintenant si ces propositions sont vraies ou fausses. Est-il nécessaire que n et m soient pairs pour que $n + m$ le soit ? Est-il certain que $n + m$ sera pair si n et m le sont ?

Il semble clair que la réponse à la seconde question est oui : $2 + 4$, $10 + 24$, $24 + 4$ sont tous pairs. La proposition 2 serait donc vraie. Il faut alors le prouver. Regardons comment la preuve se déroule :

Montrons $\forall n \in \mathbf{Z}, \forall m \in \mathbf{Z}, \quad 2|n \text{ et } 2|m \implies 2|n + m$.

Soient $n \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{Z}$

Supposons $2|n$ et $2|m$,

et montrons que $2|n + m$.

Il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $\ell \in \mathbf{Z}$ tels que $n = 2k$ et $m = 2\ell$.

Alors $n + m = 2k + 2\ell$.

Donc $n + m = 2(k + \ell)$.

Comme $k + \ell$ est un entier on en déduit $2|n + m$.

On a bien montré que si $2|n$ et $2|m$ alors $2|n + m$.

Donc la proposition est démontrée.

On se donne un n et un m quelconques.

On part de la première partie de l'implication et on cherche à montrer que la seconde est vraie.

On traduit nos hypothèses.

On passe enfin à la preuve véritable.

Objectif atteint : $n + m$ est pair

On conclut.

Passons à la proposition 1. Non, il n'est pas nécessaire que n et m soient pairs pour que leur somme soit paire. On peut imaginer d'autres possibilités. Par exemple $3 + 5 = 8$ est pair avec n et m impairs. Cet exemple suffit-il à démontrer que la proposition 1 est fausse. Eh bien oui. La proposition dit que si la somme est paire alors les deux entiers sont nécessairement pairs. Notre contre-exemple montre que ce

n'est pas toujours vrai. Regardons la négation de la proposition :

$$\exists n \in \mathbf{Z}, \exists m \in \mathbf{Z}, \quad 2|n+m \text{ et } \neg(2|n \text{ et } 2|m)$$

$$\exists n \in \mathbf{Z}, \exists m \in \mathbf{Z}, \quad 2|n+m \text{ et } (2 \nmid n \text{ ou } 2 \nmid m).$$

En français usuel : il existe des entiers tels que leur somme soit paire mais l'un des deux au moins est impair. C'est exactement ce que fait notre contre-exemple.

Montrons que la proposition 1 est fausse. Autrement dit montrons que sa négation est vraie :

$$\exists n \in \mathbf{Z}, \exists m \in \mathbf{Z}, \quad 2|n+m \text{ et } (2 \nmid n \text{ ou } 2 \nmid m).$$

Soient $n = 3$ et $m = 5$ dans $\mathbf{Z}$.

Alors $n + m = 8$ est divisible par 2.

Et n n'est pas divisible par 2.

Finalement on a bien $2|n+m$ et $(2 \nmid n \text{ ou } 2 \nmid m)$ On a même $(2 \nmid n \text{ et } 2 \nmid m)$ mais peu importe.

On a donc prouvé qu'il existait des entiers n et m satisfaisant la proposition ci-dessus.

La négation est donc vraie et la proposition 1 est donc fausse.

Exercice 3

Traduire en français usuel la proposition suivante puis donner sa négation. Enfin, la démontrer ou l'infirmar.

$$\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, \quad 2|a^2 - b^2 \implies 4|a^2 - b^2.$$

Analysons la proposition. Elle concerne deux entiers a et b . On voit apparaître deux expressions : $2|a^2 - b^2$ et $4|a^2 - b^2$. Le terme véritablement important, celui qui est au cœur de la proposition est donc $a^2 - b^2$. Il s'agit d'une différence entre deux nombres au carré. Dans le premier cas, cette différence est divisible par 2 (elle est paire donc), dans le second elle est divisible par 4. Passons maintenant à la proposition dans sa globalité. Les $\forall$ montrent qu'il s'agit d'une propriété générale indépendante des valeurs de a et b . Et l'implication se traduit ainsi : si c'est divisible par 2 alors c'est divisible par 4. Nous proposons la traduction suivante :

Si une différence de carrés d'entiers est paire, alors elle est divisible par 4.

Si on maîtrise bien les règles de négation, on peut écrire sa négation directement :

$$\exists a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N}, \quad 2|a^2 - b^2 \text{ et } 4 \nmid a^2 - b^2.$$

Cela signifie l'existence d'un contre-exemple : il existe une différence de carrés qui est paire mais qui n'est pas divisible par 4.

La proposition est-elle vraie ou fausse ? Soit elle est vraie et on doit pouvoir la démontrer en toute généralité, soit elle est fausse et on est capable d'exhiber un contre-exemple. Regardons quelques exemples.

$3^2 - 1^2 = 8$ est pair et divisible par 4 ;

$3^2 - 2^2 = 5$ n'est même pas pair, il n'est pas concerné par la proposition ;

$4^2 - 2^2 = 12$ est pair et divisible par 4 ;

$5^2 - 1^2 = 24$ est pair et divisible par 4 ;

$5^2 - 3^2 = 16$ est pair et divisible par 4.

On peut continuer, il semble que la proposition ne soit pas mise en défaut. Dans ce cas on peut essayer de la démontrer.

Il s'agit de démontrer une implication. On part donc du premier membre : $2|a^2 - b^2$, et on cherche à démontrer le second membre : $4|a^2 - b^2$. On ne peut en général pas déduire que si un nombre est pair, alors il est divisible par 4. Il faudra forcément utiliser le fait que notre nombre n'est pas tout à fait quelconque, il s'écrit sous la forme $a^2 - b^2$. Se contenter de traduire $2|a^2 - b^2$ par $a^2 - b^2 = 2k$ ne permettra pas d'aller très loin. Il y a plusieurs preuves possibles ! Proposons une idée : faire apparaître 2 dans a et b en utilisant leur parité. On ne sait pas si a et b sont pairs ou impairs mais on peut traiter plusieurs cas. Et on note facilement que si $a^2 - b^2$ est pair alors a et b ont la même parité. Voilà une preuve possible :

Montrons $\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, \quad 2|a^2 - b^2 \implies 4|a^2 - b^2$.

Soient $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}$.

Supposons que $a^2 - b^2$ est pair.

Si a est pair et b impair, alors a^2 est pair et b^2 est impair.

Alors $a^2 - b^2$ est impair ce qui est faux par hypothèse.

Il est donc impossible que a soit pair et b impair.

Il est de même impossible que a soit impair et b pair.

Il reste deux cas : a et b sont pairs ou a et b sont impairs.

Traitons chacun des cas : supposons a et b pairs.

Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ et $\ell \in \mathbf{N}$ tels que $a = 2k$ et $b = 2\ell$. Alors $a^2 - b^2 = 4k^2 - 4\ell^2 = 4(k^2 - \ell^2)$.

Donc $a^2 - b^2$ est divisible par 4.

Supposons maintenant a et b impairs.

Alors il existe $k \in \mathbf{N}$ et $\ell \in \mathbf{N}$ tels que $a = 2k+1$ et $b = 2\ell+1$. Alors $a^2 - b^2 = 4k^2 + 4k + 1 - (4\ell^2 + 4\ell + 1) = 4(k^2 + k - \ell^2 - \ell)$.

Donc $a^2 - b^2$ est divisible par 4.

Dans tous les cas, nous avons démontré que $a^2 - b^2$ est divisible par 4.

Donc si $2|a^2 - b^2$, alors $4|a^2 - b^2$, la proposition est démontrée.

Nous proposons une autre preuve un peu plus astucieuse. Elle n'est pas meilleure que la précédente, juste un peu différente.

Montrons $\forall a \in \mathbf{N}, \forall b \in \mathbf{N}, \quad 2|a^2 - b^2 \implies 4|a^2 - b^2$.

Soient $a \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{N}$.

Supposons que $a^2 - b^2$ est pair.

Comme dans la preuve précédente, on peut en déduire que a et b ont la même parité.

Dans le cas pair ou impair, on obtient toujours que $a + b$ est pair.

De même on a dans tous les cas $a - b$ pair.

Or $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Donc $a^2 - b^2$ est le produit de deux entiers pairs.

C'est donc un multiple de 4.

On peut alors conclure cette preuve.

Exercice 5

Démontrer ou infirmer la proposition suivante :

$$\forall f \in E, f \text{ paire} \Leftrightarrow f' \text{ impaire.}$$

Il s'agit d'une équivalence. Elle n'est vraie que si les deux implications le sont. Et dans ce cas, cela nécessite deux preuves. Avant de se faire une idée, le mieux est de regarder quelques exemples :

$f(x) = x^2$ est paire et sa dérivée $f'(x) = 2x$ est impaire ;

$f(x) = \cos(x)$ est paire et sa dérivée $f'(x) = \sin(x)$ est impaire ;

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est paire et sa dérivée $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ est impaire ;

Il semble que le résultat soit juste. Mais attention, nous n'avons en fait vérifié que la première implication. La réciproque est plus subtile car on part de la dérivée : si $f'(x) = x$ (impaire) alors $f(x) = \frac{x^2}{2} + c$ où c est une constante réelle.

Peu importe la constante, f est paire. Nous vous laissons regarder plus d'exemples. Faisons l'hypothèse que la proposition est vraie et essayons de la démontrer.

Soit $f \in E$

On se donne une fonction quelconque.

Montrons que f paire $\Leftrightarrow f'$ impaire.

Raisonnons par double implication et commençons par montrer f paire $\Rightarrow f'$ impaire.

Supposons donc f paire,
et montrons que f' est impaire.

On part du côté gauche de l'implication
et on doit en déduire le côté droit.

On a $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$.

On traduit l'hypothèse 'paire'.

Posons la fonction h définie par $h(x) = f(-x)$.

D'après ce qui précède, les fonctions f et h sont égales.

Leurs dérivées le sont donc aussi : $h' = f'$.

Donc $\forall x \in \mathbf{R}, h'(x) = -f'(-x) = f'(x)$.

C'est ici l'argument central de cette preuve.

On reconnaît la définition d'une fonction impaire.

Donc f' est impaire.

On a bien démontré que si f est paire, alors f' est impaire.

Démontrons maintenant l'implication réciproque.
Supposons f' impaire et montrons que f est paire.

Cette seconde partie de la preuve peut être
parfaitement indépendante de la première.

Nous laissons le lecteur terminer la preuve. Nous conseillons d'essayer de remonter la première preuve à rebours, mais attention, il y a une subtilité à ne pas rater !

Exercice 6

Donner les listes des entiers n compris entre 0 et 30 vérifiant les propriétés suivantes.

$$\exists! k \in \mathcal{P}, k|n.$$

C'est un exercice de traduction. Il s'agit avant tout de comprendre le sens de la proposition, dresser la liste des entiers qui la satisfont est ensuite facile.

Analysons la proposition. L'entier n est préalablement fixé, seul l'entier k est défini dedans. L'expression $k|n$ signifie que k est un diviseur de n , $k \in \mathcal{P}$ signifie qu'il s'agit d'un nombre premier. Nous pouvons traduire ainsi : il existe un unique nombre premier k divisant n . La proposition est donc vraie si l'entier n choisi ne possède qu'un seul diviseur premier. Les nombres premiers vérifient cela mais également leurs puissances. Il ne faut pas oublier les cas souvent particuliers de 0 et 1. Le nombre 0 est divisible par tous les entiers. Il n'a donc pas d'unique diviseur premier. L'entier 1 n'est divisible que par 1 qui n'est pas un nombre premier. Il n'a donc aucun diviseur premier.

La liste est : 2,3,4,5,7,8,9,11,13,16,17,19,23,25,27,29.

Exercice 7

Le nombre réel $\log_{10}(2)$ est-il rationnel ?

Nous ne répondrons pas à la question. Avant cela il faut déjà répondre à celle-ci : qu'est-ce que le nombre $\log_{10}(2)$?

Une première réponse est $\log_{10}(2) = \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$. C'est juste mais cela repousse le problème : que sont les nombres $\ln(10)$ et $\ln(2)$. Là, ça se complique. Par définition, la fonction $\ln$ est la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1. Il ne semble pas évident d'en tirer quelque chose pour notre problème initial... On peut aussi définir $\ln$ comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle : $e^{\ln(x)} = x$ mais ce n'est pas vraiment mieux.

Ce dernier point de vue est néanmoins le bon mais si on l'applique à notre fonction initiale. La fonction $\log_{10}$ est la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$. En particulier on peut affirmer $10^{\log_{10}(2)} = 2$ et $\log_{10}(10^2) = 2$. Ce qui est intéressant, c'est qu'on a fait apparaître le nombre 10 qui a le bon goût d'être un nombre entier. Comme notre problème est un problème d'arithmétique, c'est plutôt intéressant.

Passons à la question : rationnel ou irrationnel ? Rappelons ce qu'est un nombre rationnel : c'est un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers. Et un nombre irrationnel est par définition un nombre qui n'est pas rationnel. Cette seconde définition est moins pratique à utiliser que la première. Le plus simple est de regarder ce que deviennent nos relations ci-dessus si $\log_{10}(2)$ est un nombre rationnel. En manipulant un peu les équations on peut espérer obtenir une réponse à la question et idéalement une preuve avec.